SÉRIE A, N° 1103
N° D'ORDRE : 1126

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN BOUZON

1re THÈSE :

STRUCTURES PRESQUE-COCOMPLEXES.

2me THÈSE :

Propositions données par la Faculté :

« **PROPAGATEURS SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE HYPERBOLIQUE** ».

Soutenues le 4 Février 1965, devant la Commission d'examen

MM. EHRESMANN — *Président*

LICHNEROWICZ, Mme CHOQUET-BRUHAT — *Examinateurs*

Extrait de : *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*
ANNO 1964-65, VOL. 24°, da pag. 53 a page. 124

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK
- LEIDEN -

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544306_0070

Jean Bouzon

STRUCTURES PRESQUE-COCOMPLEXES

Introduction

On connaît, sur les variétés de dimension paire $2n$, les structures presque complexes définies par un champ d'opérateurs $\mathfrak{J}$ de carré -1 et les structures presque symplectiques définies par un champ de 2-formes F ayant partout pour rang $2n$. On sait que l'existence d'un champ de l'une de ces deux espèces entraîne l'existence d'un champ de l'autre espèce.

Pour les variétés de dimension impaire $2n+1$, Mademoiselle Paulette Libermann a défini les structures presque cosymplectiques par la donnée d'une 1-forme globale ω et d'une 2-forme globale F, telles que la $(2n+1)$-forme $\omega \wedge F^n$ soit partout non nulle. Les équations $i(X)\omega = 0$ et $i(X)F = 0$ définissent respectivement un champ d'hyperplans Π dits horizontaux et de droites D dites verticales. De façon analogue au cas d'une dimension paire, on peut toujours introduire, sur une variété munie d'une telle structure, au moins une métrique riemannienne Φ choisie de telle sorte que Π et D soient orthogonaux en tout point et que les restrictions de Φ et de F à chaque Π soient échangeables. J'appelle « presque-cohermitienne » une telle structure définie par ω, F et Φ.

On est alors conduit à définir une nouvelle structure, que j'appelle « presque-cocomplexe ». Une telle structure est définie sur une variété V_{2n+1} de classe C^∞ et de dimension $2n+1$, par la donnée d'un champ C^∞ d'opérateurs linéaires $\mathfrak{J}$ de rang $2n$ vérifiant les conditions suivantes : si T_x est l'espace tangent en x, $\mathfrak{J}$ induit sur l'hyperplan $\mathfrak{J}T_x$ un opérateur de carré -1 ; le champ de droites défini par $\mathfrak{J}X = 0$ est continûment orientable.

Réciproquement on montrera, par l'introduction d'une métrique riemannienne convenable, que l'existence d'une telle structure sur une variété entraîne l'existence d'une structure presque cosymplectique.

Je détermine le tenseur de structure (ou tenseur de torsion) d'une structure presque-cocomplexe et étudie l'intégrabilité de la structure. Une structure presque-cocomplexe intégrable prend le nom de structure « cocomplexe » : il y a alors des coordonnées locales adaptées (x^0, z^α), $(\alpha = 1, 2, ..., n)$, l'une réelle x^0, les autres complexes z^α.

Sur une variété presque-cocomplexe, une connexion linéaire sera dite presque-cocomplexe si les repères déduits par transport d'un repère adapté à la structure sont tous, eux aussi, adaptés. Pour cela il faut et il suffit que la différentielle absolue du tenseur presque-cocomplexe $\mathfrak{J}$ soit nulle. A toute connexion linéaire correspond, par une certaine projection, une connexion presque-cocomplexe dite induite par la première. Pour qu'une structure presque-cocomplexe ait sa torsion nulle, il faut et il suffit qu'elle admette une connexion presque-cocomplexe à torsion nulle.

On donne un exemple de structure presque-cohermitienne sur les sphères de dimension impaire, et de même sur toute variété orientable V_{2n+1} plongée dans une variété presque hermitienne V_{2n+2}. Pour les structures presque-cohermitiennes, on appelle connexions presque-cohermitiennes les connexions qui sont à la fois presque-cocomplexes et euclidiennes. A toute structure presque-cohermitienne on associe canoniquement deux connexions presque-cohermitiennes qu'on appelle première et deuxième connexions canoniques de la structure.

On appellera structure « presque-cokählerienne » une structure presque-cohermitienne telle que ses formes ω et F soient fermées. Elles sont alors aussi cofermées, et par suite harmoniques. Si de plus la structure presque-cocomplexe sous-jacente est intégrable, la structure subordonnée reçoit le qualificatif de « cokählerienne ». On détermine certaines conditions suffisantes pour qu'une variété admette une structure cokählerienne.

Puis on détermine dans divers cas des propriétés du groupe d'holonomie d'une connexion presque-cocomplexe ou presque-cohermitienne relative à l'une des structures précédentes. On en déduit en particulier une propriété de la réductibilité des variétés cokählériennes.

Au chapitre VII on définit et étudie certains opérateurs sur les

formes différentielles des variétés munies d'une des structures précédentes. La considération des sous-espaces propres de l'opérateur $\mathfrak{J}$ sur le complexifié de l'espace tangent avait conduit, au chapitre I, à la notion de tenseurs purs de différents types, notion ensuite étendue à des opérateurs sur les tenseurs ou sur les formes différentielles. Si la structure presque-cocomplexe est intégrable, l'opérateur d de différentiation extérieure peut se décomposer en somme de trois opérateurs purs d_0, d', d''. Sur une variété cohermitienne, on obtient en outre trois composantes pures $\delta_0, \delta', \delta''$ pour la codifférentiation. Pour une variété cokählerienne, on montre que le laplacien Δ transforme toute forme pure en une forme pure du même type. On en déduit pour les nombres de Betti d'une variété cokählerienne compacte des relations étroitement liées à celles qui sont connues pour les variétés kähleriennes.

Enfin, on étudie certaines transformations sur les variétés précédentes. Tout particulièrement les transformations qui laissent invariante la structure presque-cocomplexe d'une variété cokählerienne compacte, mais aussi les transformations conformes, les transformations affines et les isométries.

Ce travail, entrepris en mars 1962, a été présenté comme thèse de doctorat à l'Université de Paris le 4 février 1965. Les principaux résultats ont été obtenus et communiqués en 1962; le manuscrit a été déposé à la Faculté en juillet 1964. J'ai été heureux de voir plusieurs auteurs japonais s'intéresser à des sujets qui sont en étroite relation avec celui de cette thèse.

Jean Bouzon - Dijon

I. - Définition - intégrabilité.

§ 1. - Préliminaires.

Lemme 1. - *S'il existe sur une variété V_m de classe C^∞ un champ C^∞ de p-plans tangents P_x, il existe aussi sur V_m un champ C^∞ de $(m-p)$-plans tangents Q_x transversal au premier, c'est-à-dire tel qu'en tout $x \in V_m$, $P_x \cap Q_x = 0$.*

En effet V_m peut toujours être munie d'une structure riemannienne C^∞ ; il suffit alors de prendre pour Q_x l'élément-plan orthogonal à P_x (Q.E.D.).

Lemme 2. - *Etant donné sur V_m plusieurs champs d'éléments-plans, tels que chacun d'eux ait une intersection nulle avec le sous-espace tangent engendré par les autres, il y a au moins une métrique riemannienne qui les rend orthogonaux deux à deux.*

D'après le lemme 1 on peut toujours se ramener au cas où la somme des dimensions de ces éléments est égale à m. Prenons par exemple trois champs, P, Q, R de dimensions respectives p, q, r avec $p+q+r=m$. Appelons φ_1, φ_2, φ_3 les projecteurs respectifs de l'espace tangent T_x sur P_x, Q_x, R_x parallèlement à QR, RP, PQ. Soit sur V_m une métrique riemannienne quelconque définie par une forme quadratique Ψ. Alors si $X \in T_x$, la somme

$$\Phi(X,X) = \Psi(\varphi_1 X, \varphi_1 X) + \Psi(\varphi_2 X, \varphi_2 X) + \Psi(\varphi_3 X, \varphi_3 X)$$

est sur T_x une forme quadratique définie positive qui dépend C^∞ de x et pour laquelle P_x, Q_x, R_x sont orthogonaux deux à deux (Q.E.D.).

Lemme 3. - *Etant donné sur une variété V_m de classe C^∞ un champ C^∞ d'hyperplans Π_x à $(m-1)$ dimensions, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe une 1-forme différentielle ω de classe C^∞ sur toute la variété, telle qu'en chaque point $x \in V_m$ l'équation $\omega(X)=0$ $(X \in T_x)$ définisse l'hyperplan Π_x.*

b) *L'un des champs de droites D_x qui sont C^∞ et transversaux au champ H, est continûment orientable.*

c) *Il existe un champ de vecteurs E global, de classe C^∞, dépourvu de zéros et transversal au champ H.*

En effet, il existe d'après le lemme 1 un champ C^∞ de droites D_x transversal au champ H. Si la condition (a) est réalisée, tout champ de droites transversal au champ H est orientable par la condition $\omega(X) > 0$, $X \in D_x$.

Si c'est la condition (b) qui est réalisée, considérons sur V_m une métrique riemannienne quelconque C^∞. Alors les vecteurs unitaires des droites D_x forment bien un champ E de classe C^∞, dépourvu de zéros et transversal à H.

Prenons maintenant cette troisième condition comme hypothèse. V_m peut être recouverte par des ouverts U_i sur chacun desquels existe une 1-forme locale π_i de classe C^∞ telle que H soit défini sur U_i par l'équation $\pi_i(X) = 0$.

Sur $U_i \cap U_j$ on a $\pi_j = \gamma_{ji}\pi_i$ où γ_{ji} est une fonction C^∞ de x, réelle et partout non nulle sur $U_i \cap U_j$. On a aussi

$$\pi_j(E_x) = \gamma_{ji}\pi_i(E_x)$$

E_x étant transversal à H_x on a $\pi_j(E_x) \neq 0$. Divisant membre à membre, on obtient

$$\frac{\pi_j}{\pi_j(E_x)} = \frac{\pi_i}{\pi_i(E_x)}$$

On définit ainsi une 1-forme globale qui vérifie la condition (a) (Q.E.D.).

Remarque: Sur une variété différentiable simplement connexe de classe C^1, tout champ continu de droites est continûment orientable.

§ 2. - Structure « presque-cohermitienne ».

Rappelons qu'une structure presque cosymplectique sur une variété V_{2n+1}, de dimension impaire $2n+1$, est définie par une

1-forme ω et une 2-forme F telles que $\omega \wedge F^n$ soit partout non nulle (où $F^n = \wedge^n F = F \wedge \ldots \wedge F$, n facteurs). Le produit intérieur par $X \in T_x$ étant représenté par $i(X)$, les équations $i(X)\omega = 0$ et $i(X)F = 0$ définissent respectivement un champ d'hyperplans Π_x appelés horizontaux et un champ de droites D_x que nous appellerons verticales.

Dans toute la suite nous conviendrons que les indices grecs minuscules prennent les valeurs entières de 1 à n, les latins minuscules de 1 à $2n$, les latins majuscules de 0 à $2n$, et nous poserons $\alpha^* = \alpha + n$.

V_{2n+1} peut être recouverte par des ouverts U sur chacun desquels existent $2n$ 1-formes ω^i linéairement indépendantes telles que $F = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \omega^\alpha \wedge \omega^{\alpha^*}$. Posons $\omega = \omega^0$.

D'après le lemme 2, il existe une métrique riemannienne qui rend orthogonaux les champs Π et D, c'est-à-dire qu'elle s'exprime dans chaque U par $(ds)^2 = (\omega^0)^2 + h_{ij}\omega^i\,\omega^j$, après division par h_{00}. On peut par la méthode de Lichnerowicz [1] § 96 en déduire une autre métrique riemannienne $\Phi = (\omega^0)^2 + g_{ij}\omega^i\omega^j = g_{AB}\omega^A\omega^B$ qui induise dans chaque hyperplan horizontal une métrique échangeable avec la 2-forme induite par F, c'est-à-dire telle que $g^{kl}F_{ki}F_{lj} = g_{ij}$ ce qui équivaut à $F_{ik}F^{kj} = -\delta_i^j$.

Dans ces conditions F et Φ déterminent sur chaque Π_x une structure vectorielle hermitienne dont l'opérateur de structure-complexe $\mathfrak{I}_\pi$ est défini par $\mathfrak{I}_i^k = F_{ij}g^{jk}$. Prolongeons $\mathfrak{I}_\pi$ à T_x en posant sur chaque U, $\mathfrak{I}_0^A = \mathfrak{I}_A^0 = 0$. On vérifie que $\mathfrak{I}_A^D = F_{AB}g^{BD}$. Cet opérateur $\mathfrak{I}$ annule les vecteurs verticaux, laisse inviariants les hyperplans horizontaux et induit sur eux un opérateur de carré -1.

La structure ainsi définie sur V_{2n+1} par ω, F et Φ sera appelée « presque-cohermitienne ». On est ainsi conduit à formuler la définition qui suit.

§ 3. - Structure « presque-cocomplexe ».

Définition. - *C'est une structure définie sur une variété V_{2n+1}, de classe C^∞ et de dimension $2n+1$, par la donnée (supposée possible) d'un champ C^∞ d'opérateurs linéaires $\mathfrak{I}$ appliquant chaque espace tangent T_x sur un sous-espace Π_x à $2n$ dimensions et induisant sur celui-ci un opérateur de carré -1. On suppose en outre que le*

champ des Π_x peut être défini par une équation $i(X)\omega = 0$ où ω est une 1-forme globale C^∞.

L'équation $\mathfrak{J}(X) = 0$ définit un champ C^∞ de droites D_x tel qu'en tout x, $D_x \cap \Pi_x = 0$. D'après le lemme 3, l'existence de ω est équivalente à l'orientabilité du champ D; ω est définie modulo un facteur réel C^∞ partout non nul.

Une telle structure peut être définie aussi par l'ensemble des données suivantes:

a) Un champ C^∞ d'hyperplans Π_x à $2n$ dimensions.

b) Un champ C^∞ d'opérateurs linéaires $\mathfrak{J}_\pi$ opérant sur Π_x, tels que $(\mathfrak{J}_\pi)^2 = -1$.

c) Un champ C^∞ de droites D_x orientable et transversal au champ Π. $\mathfrak{J}$ sera alors défini sur T_x par $\begin{cases} \mathfrak{J}(X) = 0 & \text{pour } X \in D_x \\ \mathfrak{J}(X) = \mathfrak{J}_\pi(X) & \text{pour } X \in \Pi_x \end{cases}$

Remarquons que la donnée (*b*) implique l'orientabilité du champ des hyperplans. Dans ces conditions, l'orientabilité du champ D est équivalente à l'orientabilité de la variété.

L'opérateur $\mathfrak{J}$ se prolonge linéairement au complexifié T_x^C de T_x et admet comme valeurs caractéristiques $0, +i, -i$. Les vecteurs caractéristiques correspondants forment respectivement la droite D_x^C complexifiée de D_x et des sous-espaces conjugués S_x^C et $\overline{S_x^C}$ de dimension n, tels que $S_x^C + S_x^C = \Pi_x^C$.

Inversement la connaissance des champs D et S^C détermine $\mathfrak{J}$ sur T_x^C par

$$(3.1) \qquad \mathfrak{J}(X) = 0 \text{ sur } D_x^C \quad \mathfrak{J}(X) = iX \text{ sur } S_x^C \quad \mathfrak{J}(X) = -iX \text{ sur } \overline{S_x^C}$$

La structure peut donc être définie au moyen d'une 1-forme globale réelle ω et d'un recouvrement de V_{2n+1} par des ouverts U (resp. V), sur chacun desquels on se donne n 1-formes complexes θ^α (resp. $\theta^{\beta'}$), telles que ω et les θ^α soient linéairement indépendantes et ne s'annulent simultanément pour aucun vecteur réel non nul et qui vérifient dans $U \cap V$

$$\theta^\alpha = A^\alpha_{\beta'} \theta^{\beta'} \qquad \text{où } (A^\alpha_{\beta'}) = A \in GL(n, \mathbf{C})$$

Posons de plus $\theta^0 = f_U(x)\omega$, où $f_U(x)$ est une fonction réelle C^∞

positive sur U. On passe d'un système local $\overset{c}{\theta}_U = (\theta^0, \theta^\alpha)$ à un autre par une matrice $\overset{c}{A}{}^U_V$ du type

$$\overset{c}{A}{}^U_V = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad a \text{ réel } > 0$$

D^C_x sera définie par $\theta^\alpha(X) = 0$, $\overline{\theta^\alpha}(X) = 0$; et S^C_x par $\theta^0(X) = 0$, $\overline{\theta^\alpha}(X) = 0$.

Les notations (ε_A) et (θ^A) désigneront dorénavant tout repère complexe et son dual, tels que

$$(3.2) \qquad \varepsilon_0 \in D_x \qquad \varepsilon_\alpha \in S^C_x \qquad \varepsilon_{\alpha^*} = \overline{\varepsilon_\alpha} \qquad \omega(\varepsilon_0) > 0$$

Ils seront dits adaptés à la structure. D'après (3.1) ce sont les repères par rapport auxquels le tenseur $(\mathfrak{I}^B_A)$ qui s'identifie à l'opérateur $\mathfrak{I}$ a pour composantes

$$\mathfrak{I}^0_A = \mathfrak{I}^B_0 = \mathfrak{I}^{\beta^*}_\alpha = \mathfrak{I}^\beta_{\alpha^*} = 0 \qquad \mathfrak{I}^\beta_\alpha = -\mathfrak{I}^{\beta^*}_{\alpha^*} = i\delta^\beta_\alpha$$

avec les conditions que les vecteurs ε_0 et $\varepsilon_{\alpha^*} + \varepsilon_\alpha$ soient réels, et $\omega(\varepsilon_0) \geq 0$.

Pour qu'un tenseur, rapporté à un repère complexe adapté, soit réel, il faut et il suffit que soient conjuguées deux à deux ses composantes qui se déduisent l'une de l'autre par étoilement simultané de tous les indices, si l'on pose $0^* = 0$ et $\alpha^{**} = \alpha$.

Soient (e_A) le repère réel et (ω^A) son corepère dual, associés à (ε_A) et (θ^A) par les relations

$$(3.4) \qquad \theta^0 = \omega^0 \qquad \sqrt{2}\,\theta^\alpha = \omega^\alpha + i\omega^{\alpha^*} \qquad \sqrt{2}\,\theta^{\alpha^*} = \omega^\alpha - i\omega^{\alpha^*}$$

d'où

$$(3.5) \qquad e_0 = \varepsilon_0 \qquad \sqrt{2}\,e_\alpha = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\alpha^*} \qquad \sqrt{2}\,\varepsilon_{\alpha^*} = i\varepsilon_\alpha - i\varepsilon_{\alpha^*}$$

$$(3.6) \qquad \varepsilon_0 = e_0 \qquad \sqrt{2}\,\varepsilon_\alpha = e_\alpha - ie_{\alpha^*} \qquad \sqrt{2}\,\varepsilon_{\alpha^*} = e_\alpha + ie_{\alpha^*}$$

Ce repère réel (e_A) vérifie

$$(3.7) \qquad e_0 \in D_x \qquad e_\alpha \in \Pi_x \qquad e_{\alpha^*} = \mathfrak{I}e_\alpha \qquad \omega(\varepsilon_0) > 0$$

Tout repère vérifiant ces conditions (3.7) sera appelé repère réel adapté à la structure presque-cocomplexe. Etant donné un tel repère, on en déduit par les relations (3.6) un repère complexe qui se trouve, lui aussi, adapté à la structure. Ces repères réels adaptés sont les repères réels par rapport auxquels le tenseur $(\mathfrak{I}_A^B)$ a pour composantes

$$\mathfrak{I}_A^0 = \mathfrak{I}_0^B = \mathfrak{I}_\alpha^\beta = \mathfrak{I}_{\alpha^*}^{\beta^*} = 0 \qquad \mathfrak{I}_\alpha^{\beta^*} = \delta_\alpha^\beta = - \mathfrak{I}_{\alpha^*}^\beta$$

avec la seule condition supplémentaire $\omega(\varepsilon_0) \geq 0$.

Types. - Un produit tensoriel d'espaces identiques à T_x^C ou à son dual $(T_x^C)^*$ peut être décomposé en la somme directe de produits tensoriels d'espaces vectoriels identiques à l'un des 6 espaces

$$D_x^C \quad S_x^C \quad \overline{S_x^C} \quad (D_x^C)^* \quad (S_x^C)^* \quad (\overline{S_x^C})^*$$

Un élément d'un produit tensoriel monôme de tels espaces sera dit tenseur « pur ». Si dans le produit considéré les 6 facteurs précédents figurent respectivement $r_1, p_1, q_1, r_2, p_2, q_2$ fois, on dira que le tenseur pur envisagé est de type $(r_1, p_1, q_1; r_2, p_2, q_2)$.

En particulier une forme extérieure est somme de formes pures dont le type sera désigné par (ε, p, q). Les formes pures non nulles vérifient $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$. Nous désignerons par $P_{(\varepsilon, p, q)}$ l'opérateur de projection d'une forme sur sa composante de type (ε, p, q).

On dira qu'un opérateur sur les formes est pur et typé s'il transforme toute forme pure de type (ε, p, q) en une forme pure de type $(\varepsilon + l, p + h, q + k)$ où l, h et k sont indépendants du type initial. Le triplet (l, h, k) s'appellera type de cet opérateur pur typé. Si l'opérateur n'est pas nul on a $-1 \leq l \leq +1$, $-n \leq h \leq +n$, $-n \leq k \leq +n$. Un opérateur de type $(0, 0, 0)$ est un opérateur qui permute avec les projecteurs $P_{(\varepsilon, p, q)}$.

§ 4. - Espaces fibrés attachés à cette structure.

Les changements de repères complexes adaptés s'effectuent selon

les relations :

$$4.1)\quad \begin{cases} \varepsilon_{0'} = \varepsilon_0 a \\ \varepsilon_{\beta'} = \varepsilon_\alpha A^\alpha_{\beta'} \\ \varepsilon_{\beta^{*'}} = \varepsilon_{\alpha^*} \overline{A^\alpha_{\beta'}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta^0 = a\theta^{0'} \\ \theta^\alpha = A^\alpha_{\beta'}\theta^{\beta'} \\ \theta^{\alpha^*} = \overline{A^\alpha_{\beta'}}\,\theta^{\beta^{*'}} \end{cases} \qquad \overset{b}{A}{}^U_V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A} \end{pmatrix}$$

Posons $A = B + iC$ où B et C sont des matrices réelles. Pour les repères (e_A) et corepères (ω^A) réels associés à (ε_A) et (θ^A), les formules de changement correspondantes s'écrivent :

$$(4.2)\quad \begin{cases} e_{0'} = e_0 a \\ e_{\beta'} = e_\alpha B^\alpha_{\beta'} + e_{\alpha^*} C^\alpha_{\beta'} \\ e_{\beta^{*'}} = -e_\alpha C^\alpha_{\beta'} + e_{\alpha^*} B^\alpha_{\beta'} \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega^0 = a\omega^{0'} \\ \omega^\alpha = B^\alpha_{\beta'}\omega^{\beta'} - C^\alpha_{\beta'}\omega^{\beta^{*'}} \\ \omega^{\alpha^*} = C^\alpha_{\beta'}\omega^{\beta'} + B^\alpha_{\beta'}\omega^{\beta^{*'}} \end{cases} \qquad \overset{a}{A}{}^U_V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & C \\ 0 & -C & B \end{pmatrix}$$

Soient respectivement $E^a(V_{2n+1})$, $E^b(V_{2n+1})$, $E^c(V_{2n+1})$ les ensembles formés par tous les repères réels (e_A), repères complexes (ε_A) et sous-repères complexes $(\varepsilon_0, \varepsilon_\alpha)$ adaptés à la structure et ayant leurs origines en tous les points de V_{2n+1}. Ils admettent chacun une structure d'espace fibré principal de classe C^∞, ayant pour base V_{2n+1} et pour groupes structuraux les groupes G_a, G_b, G_c, isomorphes à $R^+ \times GL(n, \boldsymbol{C})$, formés par les matrices des types respectifs $\overset{a}{A}{}^U_V$, $\overset{b}{A}{}^U_V$, $\overset{c}{A}{}^U_V$.

Les matrices réelles $\overset{a}{A}{}^U_V$ ont mêmes déterminants que les matrices $\overset{b}{A}{}^U_V$ correspondantes, soit $a \times |\det A|^2$; tous ces déterminants sont positifs. Ce qui prouve à nouveau que les variétés presque-cocomplexes sont orientables.

§ 5. - « Torsion » d'une structure presque-cocomplexe. Intégrabilité.

Dans l'expression de la 2-forme $d\theta^0$ au moyen des $\theta^A \wedge \theta^B$, soit T^0 la somme des termes qui ne contiennent pas θ^0. De même dans l'expression de $d\theta^\alpha$, soit T^α la somme des termes qui ne contiennent aucun θ^λ.

$$\begin{cases} T^0 = \dfrac{1}{2}\, t^0_{ij}\, \theta^i \wedge \theta^j \equiv d\theta^0 \quad \text{modulo } \theta^0 \\ T^\alpha = \dfrac{1}{2}\, t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}\, \theta^{\beta^*} \wedge \theta^{\gamma^*} + t^\alpha_{0\gamma^*}\, \theta^0 \wedge \theta^{\gamma^*} \equiv d\theta^\alpha \quad \text{modulo } (\theta^\lambda) \end{cases}$$

Par différentiation extérieure des formules de changement de repères complexes adaptés, on obtient

$$\begin{cases} d\theta^{0'} \equiv A^{0'}_0\, d\theta^0 \quad \text{modulo } \theta^0 \text{ ou } \theta^{0'} \qquad A^{0'}_0 = \dfrac{1}{a} \\ d\theta^{\beta'} \equiv A^{\beta'}_\alpha\, d\theta^\alpha \quad \text{modulo } (\theta^\lambda) \text{ ou } (\theta^{\mu'}) \end{cases}$$

Ces congruences prouvent que $T^{0'} = A^{0'}_0 T^0$, $T^{\beta'} = A^{\beta'}_\alpha T^\alpha$.

Ainsi les 2-formes locales (T^0, T^α) associées aux différents ouverts U du recouvrement de V_{2n+1} définissent sur $E^e(V_{2n+1})$ une 2-forme tensorielle de type vectoriel que nous appellerons « torsion » de la structure presque-cocomplexe.

La condition $T^0 = 0$ équivaut à $d\theta^0 \wedge \theta^0 = 0$, donc aussi à $d\omega \wedge \omega = 0$. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que l'équation de Pfaff $\omega = 0$ soit complètement intégrable sur V_{2n+1}. Il y a alors des variétés intégrales « horizontales » et sur chacune d'elles se trouve induite une structure presque complexe. Remarquons d'ailleurs que dans tous les cas il y a toujours des lignes « verticales », car un champ de droites est toujours complètement intégrable.

Si la torsion est entièrement nulle, nous dirons que la structure est « pseudococomplexe ». La structure induite sur les variétés horizontales est presque complexe sans torsion, donc analytique complexe d'après Newlander et Nirenberg [8]. Pour cela il n'est d'ailleurs pas nécessaire que $t^\alpha_{0\gamma^*} = 0$; il suffit que $t^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = 0$ en plus de $T^0 = 0$.

En particulier la torsion est nulle lorsque la structure est intégrable, c'est-à-dire lorsque la variété peut être rapportée à des coordonnées locales réelles (x^A) et à des coordonnées mixtes (x^0, z^α) où $\sqrt{2}\, z^\alpha = x^\alpha + i x^{\alpha^*}$ telles que les corepères naturels associés (dx^A) et $(dx^0, dx^\alpha, \overline{dz^\alpha})$ soient adaptés à la structure. Une telle structure prendra le nom de « structure cocomplexe ». Dans ce cas nous appellerons coordonnées cocomplexes des coordon-

nées (x^0, z^α) vérifiant la condition ci-dessus. Selon (4.1) un changement de coordonnées cocomplexes vérifie

$$\begin{cases} dx^0 = A^0_{0'} dx^{0'} & A^0_{0'} \in R^+ \\ dz^\alpha = A^\alpha_{\beta'} dz^{\beta'} & (A^\alpha_{\beta'}) = A \in GL(n, \boldsymbol{C}) \end{cases}$$

Ceci exprime que x^0 est une fonction réelle de $x^{0'}$, à dérivée positive, et que les z^α ne dépendent que des $z^{\beta'}$ et en sont des fonctions holomorphes, à jacobien non nul.

Cherchons maintenant si la nullité de la torsion entraine l'intégrabilité de la structure. Soit P_0 un point d'une variété pseudo-cocomplexe V_{2n+1}, H_0 la variété horizontale passant par P_0, et U_0 un voisinage de P_0 dans H_0, constitué par un domaine de coordonnées complexes (z^α) compatibles avec la structure analytique complexe induite sur H_0. Soit H une deuxième variété horizontale passant assez près de P_0. Les lignes verticales issues de U_0 forment un voisinage de P_0 dans V_{2n+1} et, si U_0 est assez petit, elles définissent un difféomorphisme de U_0 sur un domaine U de H. Si de plus x^0 est une variable convenable qui fixe la position de chaque variété horizontale, avec $x^0 = 0$ sur H_0, on obtient ainsi au voisinage de P_0 un système de coordonnées mixtes (x^0, z^α) dont les corepères naturels sont, par construction, adaptés à la structure en tout point de U_0. Reste à voir s'ils sont encore adaptés en dehors de H_0.

La structure analytique complexe induite sur chaque feuille horizontale H dépend différentiablement de x^0, c'est-à-dire qu'il existe n fonctions complexes $u^\alpha\ (z^0, z^1, ..., z^n)$ différentiables au sens réel, qui induisent sur chaque feuille horizontale $(x^0 = \text{constante})$ des coordonnées complexes (u^α) compatibles avec la structure induite. En particulier sur H_0, les $u^\alpha(0, z^\beta)$ sont des fonctions analytiques complexes des z^β, c'est-à-dire que $\partial_{\lambda^*} u^\alpha(0, z^\beta) = 0$. Reste à voir si les $\partial_{\lambda^*} u^\alpha$ restent nuls aussi en dehors de H_0. Si on pose

$$\begin{cases} \theta^0 = dx^0 \\ \theta^\alpha = \partial_i u^\alpha dz^i = du^\alpha - \partial_0 u^\alpha dx^0 \end{cases}$$

les formes $(\theta^0, \theta^\alpha, \overline{\theta^\alpha})$ définissent donc, en tout point assez voisin de P_0, un corepère complexe adapté à la structure donnée. Si A représente la matrice inverse de $B = (\partial_i u^j) \in GL(2n, \boldsymbol{C})$ où l'on a posé $u^\alpha = u^{\alpha^*}$, on aura $dz^i = A^i_j \theta^j$ en posant $\overline{\theta^\alpha} = \theta^{\alpha^*}$.

$$\begin{cases} d\theta^0 = 0 \\ d\theta^\alpha = \partial^2_{0i} u^\alpha dx^0 \wedge dz^i = A^i_j \partial^2_{0i} u^\alpha \theta^0 \wedge \theta^j = A^i_j \partial_0 B^\alpha_i \theta^0 \wedge \theta^j \end{cases}$$

La nullité de la torsion s'exprime alors par

$$A^i_{\mu^*} \partial_0 B^\alpha_i = 0 \tag{5.6}$$

Grâce à la relation $A^i_{\mu^*} B^\alpha_i = 0$ on obtient aussi

$$\partial_0 A^i_{\mu^*} B^\alpha_i = 0 \tag{5.7}$$

Pour $x^0 = 0$ on a par hypothèse $B^\alpha_{\lambda^*} = 0$, d'où $A^\beta_{\mu^*} = 0$. Les deux équations précédentes fournissent alors aussi $\partial_0 B^\alpha_{\lambda^*} = 0 = \partial_0 A^\beta_{\mu^*}$. En effectuant les dérivations successives au moyen de la règle de Leibniz et en appliquant le principe de récurrence, on déduit de ces deux équations que toutes les dérivées successives des $B^\alpha_{\lambda^*}$ et des $A^\beta_{\mu^*}$ par rapport à x^0 sont nulles pour $x^0 = 0$.

a) Si on suppose que les u^α sont des fonctions analytiques par rapport à la variable réelle x^0, on en déduit que les $B^\alpha_{\lambda^*}$ restent nuls aussi pour $x^0 \neq 0$. Il y a donc un voisinage de P_0 où les u^α sont des fonctions holomorphes par rapport aux variables z^λ. En particulier, on obtient:

Proposition. - *Pour qu'une structure presque-cocomplexe de classe analytique réelle, sur une variété de même classe, soit intégrable, il faut et suffit que sa torsion soit nulle.*

b) Les équations (5.6) et leurs conjuguées expriment que les $2n^2$ déterminants obtenus en remplaçant dans B l'une quelconque des n colonnes de droite par la dérivée en x^0 d'une quelconque des n colonnes de gauche, et vice-versa, sont tous nuls.

Pour $n = 1$, ce système (5.6) se réduit à la seule équation

$$-\partial_{1^*} u \, \partial^2_{01} u + \partial_1 u \, \partial^2_{01^*} u = 0$$

qui exprime que le quotient de $\partial_{1^*} u$ par $\partial_1 u$ est indépendant de x^0. Or ce quotient est nul sur H_0 ; il reste donc nul aussi en dehors

de H_0. On obtient:

PROPOSITION. - *Pour qu'une structure presque-cocomplexe de classe C^2, sur une variété de même classe et de dimension 3, soit intégrable, il faut et suffit que sa torsion soit nulle.*

Il semble qu'on puisse conjecturer que ce résultat est valable pour toute dimension $2n+1 \geqslant 3$ et pour une différentiabilité de classe finie.

Note: Ce problème est maintenant résolu, grâce à un travail tout récent de Madame LEHMAMN-LEJEUNE. Voir C. R. Ac. Sc. Paris, janvier 1965.

II. - CONNEXIONS PRESQUE-COCOMPLEXES.

§ 6. - CONNEXION « PRESQUE-COCOMPLEXE » SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE-COCOMPLEXE.

Nous appellerons ainsi toute connexion infinitésimale sur l'espace fibré principal $E^c(V_{2n+1})$. Elle peut être définie par la donnée, sur chaque ouvert $U, V, \ldots$ d'un recouvrement de V_{2n+1}, d'un champ local de sous-corepères adaptés $\overset{c}{\theta}{}^U = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^n)$ et d'une 1-forme locale π_U à valeurs matricielles dans l'algèbre de LIE du groupe structural G_c, ces matrices satisfaisant dans $U \cap V$ à la condition de cohérence

$$\pi_V = (\overset{c}{A}{}^U_V)^{-1}\,\pi_U \overset{c}{A}{}^U_V + (\overset{c}{A}{}^U_V)^{-1}\,d\overset{c}{A}{}^U_V \qquad \overset{c}{\theta}{}^U = \overset{c}{A}{}^U_V \overset{c}{\theta}{}^V \qquad \pi_U = \begin{pmatrix} \pi_0^0 & 0 \\ 0 & \pi_\beta^\alpha \end{pmatrix}$$

où π_0^0 est une 1-forme réelle et les π_β^α des 1-formes complexes.

Cette connexion peut être identifiée à celles qui sont définies sur $E^b(V_{2n+1})$ et $E^a(V_{2n+1})$ par les matrices

$$\begin{pmatrix} \pi_0^0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\pi_\beta^\alpha} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi_0^0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\beta^\alpha & \omega_\beta^{\alpha^*} \\ 0 & -\omega_\beta^{\alpha^*} & \omega_\beta^\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \pi_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha + i\omega_\beta^{\alpha^*}$$

où les ω_j^i sont des 1-formes réelles.

$E^a(V_{2n+1})$ est un sous-fibré de l'espace $E(V_{2n+1})$ de tous les repères réels, qui est lui-même un sous-fibré de l'espace $C(V_{2n+1})$ de tous les repères complexes. Il en résulte qu'une connexion presque-cocomplexe s'identifie à un cas particulier de connexion linéaire réelle.

On appellera torsion et courbure de la connexion presque-cocomplexe celles de la connexion linéaire ainsi associée. En repères complexes adaptés on a pour la courbure

$$(6.3)\qquad \Omega_0^0=d\pi_0^0 \qquad \Omega_\beta^\alpha=d\pi_\beta^\alpha+\pi_\lambda^\alpha\wedge\pi_\beta^\lambda \qquad \Omega_{\beta^*}^{\alpha^*}=\overline{\Omega}_\beta^\alpha$$
$$\Omega_0^\alpha=\Omega_\beta^0=\Omega_{\beta^*}^\alpha=\Omega_\beta^{\alpha^*}=\Omega_{\beta^*}^0=\Omega_0^{\alpha^*}=0$$

§ 7. - Relations avec les connexions linéaires réelles.

Pour un recouvrement de V_{2n+1} par des ouverts U, V, ... munis chacun d'un champ local de repères (e_A) et corepères (ω^A) réels adaptés, une connexion linéaire complexe (resp. réelle) est définie par des 1-formes ω_B^A complexes (resp. réelles). La différentiation absolue des vecteurs est déterminée par $\nabla e_B=e_A\omega_B^A$.

Rapportons maintenant la connexion aux repères (ε_A) et corepères (θ^A) complexes adaptés associés aux précédents par les formules (3.6) que voici :

$$\varepsilon_0=e_0 \qquad \sqrt{2}\,\varepsilon_\alpha=e_\alpha-ie_{\alpha^*} \qquad \sqrt{2}\,\varepsilon_{\alpha^*}=e_\alpha+ie_{\alpha^*}$$

La matrice correspondant à ce changement de repères étant constante sur tout l'ouvert U, les formes locales de connexion sont changées comme les composantes d'un tenseur. La nouvelle matrice de connexion (π_B^A) est définie par $\nabla\varepsilon_B=\varepsilon_A\pi_B^A$. On en déduit :

$$(7.2)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\pi_0^0=\omega_0^0 & \sqrt{2}\,\pi_\beta^0=\omega_\beta^0-i\omega_{\beta^*}^0 \qquad \sqrt{2}\,\pi_{\beta^*}^0=\omega_\beta^0+i\omega_{\beta^*}^0 \\
\sqrt{2}\,\pi_0^\alpha=\omega_0^\alpha+i\omega_0^{\alpha^*} & 2\pi_\beta^\alpha=\omega_\beta^\alpha+i\omega_\beta^{\alpha^*}-i\omega_{\beta^*}^\alpha+\omega_{\beta^*}^{\alpha^*} \\
2\pi_{\beta^*}^\alpha=\omega_\beta^\alpha+i\omega_\beta^{\alpha^*}+i\omega_{\beta^*}^\alpha-\omega_{\beta^*}^{\alpha^*} & \\
\sqrt{2}\,\pi_0^{\alpha^*}=\omega_0^\alpha-i\omega_0^{\alpha^*} & 2\pi_\beta^{\alpha^*}=\omega_\beta^\alpha-i\omega_\beta^{\alpha^*}-i\omega_{\beta^*}^\alpha-\omega_{\beta^*}^{\alpha^*} \\
2\pi_{\beta^*}^{\alpha^*}=\omega_\beta^\alpha-i\omega_\beta^{\alpha^*}+i\omega_{\beta^*}^\alpha+\omega_{\beta^*}^{\alpha^*} &
\end{array}\right.$$

Pour cette matrice (π_B^A) la réalité de la connexion se traduit par la condition que soient conjugués deux à deux les éléments se déduisant l'un de l'autre par étoilement simultané des deux indices. Nous supposerons maintenant que la connexion est réelle.

Dans $U \cap V$ le changement de repères complexes adaptés est défini par une matrice $\overset{b}{A}{}_V^U$, du type (4.1). Le changement de matrices de connexion vérifie la condition de cohérence $\pi_{M'}^{L'} = A_\Lambda^{L'}\, \pi_B^\Lambda\, A_{M'}^B + A_B^{L'}\, dA_{M'}^B$, en l'occurrence :

$$(7.3) \qquad \pi_{0'}^{0'} = \pi_0^0 + \frac{1}{a}\, da \qquad \pi_{\mu'}^{\lambda'} = A_\alpha^{\lambda'}\, \pi_\beta^\alpha\, A_{\mu'}^\beta + A_\beta^{\lambda'}\, dA_{\mu'}^\beta$$

$$(7.4) \qquad \pi_{0'}^{\lambda'} = A_\alpha^{\lambda'}\, \pi_0^\alpha\, A_{0'}^0 \quad \pi_{\mu'}^{0'} = A_0^{0'}\, \pi_\beta^0\, A_{\mu'}^\beta \quad \pi_{\mu^{*\prime}}^{\lambda'} = A_\alpha^{\lambda'}\, \pi_{\beta^*}^\alpha\, A_{\mu^{*\prime}}^{\beta^*}.$$

Les relations (7.3) prouvent que les éléments π_0^0 et π_β^α définissent sur V_{2n+1} une connexion presque-cocomplexe. Nous dirons qu'elle est induite par la connexion linéaire réelle envisagée.

Les relations (7.4) et leurs conjuguées montrent que chacun des six ensembles d'éléments π_0^α, π_β^0, $\pi_{\beta^*}^\alpha$, $\pi_0^{\alpha^*}$, $\pi_{\beta^*}^0$, $\pi_\beta^{\alpha^*}$ définit une 1-forme sur $E^b\,(V_{2n+1})$ prenant des valeurs tensorielles affines de type une fois contravariant et une fois covariant. Selon l'expression $\pi_B^\Lambda = \gamma_{B0}^\Lambda \theta^0 + \gamma_{B\alpha}^\Lambda \theta^\alpha + \gamma_{B\alpha^*}^\Lambda \theta^{\alpha^*}$ ces six ensembles d'éléments donnent 18 ensembles de coefficients qui définissent sur V_{2n+1} 18 tenseurs de type une fois contravariant et deux fois covariant.

Remarque. S'il s'agit d'une variété cocomplexe et si l'on se restreint aux repères naturels des divers systèmes de coordonnées cocomplexes (x^0, z^α), la fonction $a = \dfrac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}$ ne dépend que de x^0, les fonctions $A_{\mu'}^\beta = \dfrac{\partial z^\beta}{\partial z^{\mu'}}$ ne dépendent que des z^α et en sont des fonctions holomorphes. Les formes da et $dA_{\mu'}^\beta$ sont donc respectivement de type (1, 0, 0) et (0, 1, 0). Posant $\pi_B^A = \Gamma_{B0}^A\, dx^0 + \Gamma_{B\lambda}^A\, dz^\lambda + \Gamma_{B\mu^*}^A\, dz^{\mu^*}$ on déduit alors des formules (7.3) que les éléments

$$\hat{\pi}_0^0 = \Gamma_{00}^0\, dx^0 \qquad \hat{\pi}_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha\, dz^\lambda$$

définissent une connexion, tandis que les trois ensembles de coefficients $\Gamma_{0\lambda}^0$, $\Gamma_{\beta 0}^\alpha$, $\Gamma_{\beta\mu^*}^\alpha$ et leurs conjugués définissent 6 tenseurs en plus des 18 précédents.

§ 8. - Différentielle absolue du tenseur presque-cocomplexe dans une connexion linéaire.

Etant donné une connexion linéaire sur V_{2n+1}, pour que la différentielle absolue du tenseur $\mathfrak{J}$ soit nulle, il faut et suffit que $\mathfrak{J}$ soit invariant par transport. Pour cela il faut et suffit que les composantes de $\mathfrak{J}$ pour un certain repère restent constantes lorsqu'on transporte ce repère, relativement à la connexion, le long de tous les chemins possibles. En particulier, si l'on suppose que la connexion est réelle, il faut et suffit que tous les repères déduits par transport d'un repère adapté à $\mathfrak{J}$ soient aussi adaptés à $\mathfrak{J}$. Cette condition exprime que la connexion s'identifie à une connexion presque-cocomplexe relativement à $\mathfrak{J}$:

Théorème. - *Pour qu'une connexion linéaire réelle soit presque-cocomplexe, il faut et suffit que la différentielle absolue du tenseur presque-cocomplexe soit nulle.*

Remarque. - Si la variété est rapportée à des repères complexes adaptés à $\mathfrak{J}$ et si la connexion (π_B^A) est presque-cocomplexe, les éléments π_B^A non-nuls ont leurs deux indices A et B de même type. Alors d'après l'expression

$$\nabla t_{BC}^A = dt_{BC}^A + \pi_L^A t_{BC}^L - \pi_B^M t_{MC}^A - \pi_C^N t_{BN}^A$$

la différentielle absolue d'un tenseur pur est pure et du même type. On en déduit qu'alors la différentiation absolue ∇ permute avec les projections selon les types. C'est là encore une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion linéaire réelle soit presque-cocomplexe.

§ 9. - Relation entre la torsion presque-cocomplexe et la torsion des connexions.

Rapportons la variété V_{2n+1} à des repères complexes adaptés à la structure presque-cocomplexe. La torsion d'une connexion presque-

cocomplexe $(\pi_0^0, \pi_\beta^\alpha)$ est définie par

$$(9.1) \qquad \Sigma^0 = d\theta^0 + \pi_0^0 \wedge \theta^0 \qquad \Sigma^\alpha = d\theta^\alpha + \pi_\lambda^\alpha \wedge \theta^\lambda$$

On voit que

$$\Sigma^0 \equiv d\theta^0 \text{ modulo } \theta^0 \qquad \Sigma^\alpha \equiv d\theta^\alpha \text{ modulo } (\theta^\lambda)$$

En conséquence, lorsque Σ^0 et Σ^α sont nulles, les 2-formes T^0 et T^a définies au paragraphe 5 sont nulles aussi.

D'autre part il existe toujours sur V_{2n+1} des connexions riemanniennes, donc des connexions linéaires réelles de torsion nulle. Une telle connexion $(\pi_B^A = \gamma_{BD}^A \theta^D)$ vérifie $d\theta^A = \theta^B \wedge \pi_B^A$. Elle induit une connexion presque-cocomplexe dont la torsion Σ s'exprime comme suit :

$$(9.3) \quad \begin{cases} \Sigma^0 = d\theta^0 \quad \theta^0 \wedge \pi_0^0 + \theta^j \wedge \pi_j^0 \qquad = \gamma_{j0}^0 \theta^j \wedge \theta^0 - T^0 \\ \Sigma^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\beta \wedge \pi_\beta^\alpha = \theta^0 \wedge \pi_0^\alpha + \theta^{\beta^*} \wedge \pi_{\beta^*}^\alpha = \gamma_{0\beta}^\alpha \theta^0 \wedge \theta^\beta + \gamma_{\beta^*\gamma}^\alpha \theta^{\beta^*} \wedge \theta^\gamma + T \end{cases}$$

On en tire

$$(9.4) \quad \begin{cases} T^0 = d\theta^0 - \theta^0 \wedge (\pi_0^0 - \gamma_{j0}^0 \theta^j) \\ T^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\lambda \wedge (\pi_\lambda^\alpha - \gamma_{0\lambda}^\alpha \theta^0 - \gamma_{\mu^*\lambda}^\alpha \theta^{\mu^*}) \end{cases}$$

Comme les coefficients γ_{j0}^0, $\gamma_{0\lambda}^\alpha$ et $\gamma_{\mu^*\lambda}^\alpha$ définissent des tenseurs d'après le paragraphe 7, on obtient encore une connexion au moyen des éléments :

$$\overline{\omega}_0^0 = \pi_0^0 - \gamma_{j0}^0 \theta^j \qquad \overline{\omega}_\beta^\alpha = \pi_\beta^\alpha - \gamma_{0\beta}^\alpha \theta^0 - \gamma_{\mu^*\beta}^\alpha \theta^{\mu^*}$$

Cette connexion est presque-cocomplexe et d'après (9.4) sa torsion est identique à la torsion de la structure. On obtient donc le résultat suivant :

Théorème. - *Pour qu'une structure presque-cocomplexe ait sa torsion nulle, il faut et suffit que la variété admette une connexion presque-cocomplexe de torsion nulle.*

III. - Structures presque-cohermitiennes.

§ 10 - Structures presque-cohermitiennes subordonnées à une structure presque-cocomplexe.

Etant donné une variété presque-cocomplexe V_{2n+1} il existe d'après le lemme 2§1 au moins une métrique riemannienne rendant orthogonaux les champs D et H, c'est-à-dire, en utilisant les notations précédentes et en prenant $\omega^0=\omega$, telle que $ds^2=(\omega^0)^2+h_{ij}\omega^i\omega^j$.

On peut en déduire une autre métrique riemannienne $\Phi=(\omega^0)^2+g_{ij}\omega^i\omega^j$ qui induise sur chaque H_x un produit scalaire invariant par $\mathfrak{J}$, en prenant par exemple $g_{ij}=\frac{1}{2}(h_{ij}+h_{kl}\mathfrak{J}_i^k\mathfrak{J}_j^l)$.

Dans ces conditions $\mathfrak{J}$ et Φ déterminent sur chaque espace vectoriel H_x une structure hermitienne dont la 2-forme fondamentale F est donnée par $F_{ij}=\mathfrak{J}_i^k g_{kj}$. Comme $\det(\mathfrak{J}_i^k)=1$, on voit que $\det(F_{ij})=\det(g_{kj})\neq 0$. Prolongeons F à T_x en posant $F_{AB}=\mathfrak{J}_A^D g_{DB}$, d'où $F_{A0}=F_{0B}=0$. On définit ainsi sur V_{2n+1} une 2-forme $F=\frac{1}{2}F_{ij}\omega^i\wedge\omega^j$ telle que $\omega\wedge F^n$ soit partout non nulle ; on montre en effet que $F^n=n!\sqrt{\det(F_{ij})}\,\omega^1\wedge\omega^2\wedge\ldots\wedge\omega^{2n}$. Ainsi, avec le paragraphe 2, on obtient donc :

Théorème. - *Toute variété qui admet une structure presque-cocomplexe admet aussi une structure presque cosymplectique, et vice-versa.*

Remarque 1. - Les relations $F_{AB}=\mathfrak{J}_A^D g_{DB}$ peuvent se traduire par :

$$F(X,Y)=g(\mathfrak{J}X,Y) \qquad \forall X, Y\in T_x$$

On en déduit facilement

$$F(\mathfrak{J}X,\mathfrak{J}Y)=F(X,Y) \qquad \forall X, Y\in T_x$$

Ceci exprime que F est invariante par $\mathfrak{J}$. On l'écrira en abrégé

$$\mathfrak{J}^*F=F$$

Remarque 2. Pour qu'une variété V_{2n+1} admette une structure presque cosymplectique, il faut et il suffit qu'elle soit orientable et qu'elle admette une 2-forme globale F de rang $2n$.

En effet, l'équation $i(X)F=0$ définit un champ de droites D « verticales ». Soit H un champ d'hyperplans transversaux (lemme 1, § 1). La restriction de F aux hyperplans H est de rang $2n$ et définit donc sur eux une orientation continue. Alors l'orientabilité de la variété équivaut à l'orientabilité du champ D. Il existe donc (lemme 3, § 1) une 1-forme globale ω définissant le champ H. Si X est un vecteur vertical non nul, on a $i(X)[\omega \wedge F^n] = [i(X)\omega] \cdot F^n \neq 0$.

D'où $\omega \wedge F^n \neq 0$.

§ 11. - Espaces fibrés attachés à une structure presque-cohermitienne.

Dans une structure presque-cocomplexe générale, la 1-forme ω est définie modulo un facteur positif. Dans le cas des structures presque-cohermitiennes nous désignerons toujours par ω celle de ces 1-formes qui est normée pour la métrique: elle est unique. En repères complexes adaptés à $\mathfrak{I}$, la condition imposée à la métrique $\Phi = g_{AB}\theta^A\theta^B$ pour qu'elle définisse avec $\mathfrak{I}$ une structure presque-cohermitienne se traduit par $g_{0j} = g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0$. Compte tenu de la symétrie, la réalité de Φ s'exprime de plus par $g_{\beta\alpha^*} = \overline{g_{\alpha\beta^*}}$. Pour ces repères on a alors

$$\Phi = g_{00}(\theta^0)^2 + 2g_{\alpha\beta^*}\theta^\alpha\theta^{\beta^*} \qquad F = ig_{\alpha\beta^*}\theta^\alpha \wedge \theta^{\beta^*} \qquad \omega = \sqrt{g_{00}}\,\theta^0$$

Nous dirons qu'un repère réel (e_A) en $x \in V_{2n+1}$ est adapté à la structure presque-cohermitienne, s'il est non seulement adapté à la structure presque-cocomplexe (cf. (3.7)) mais aussi orthonormé pour la structure riemannienne. Si (ω^A) désigne le corepère dual, on a

$$\Phi = (\omega^0)^2 + (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^{2n})^2 \qquad F = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \omega^\alpha \wedge \omega^{\alpha^*} \qquad \omega = \omega^0$$

Nous appellerons repères complexes adaptés à la structure

presque-cohermitienne les repères complexes (ε_A) duaux des corepères complexes (θ^A) associés aux corepères réels précédents par la transformation (3.4). Pour ces repères, Φ, F et l'élément de volume η ont pour expression

$$\Phi=(\theta^0)^2+2\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\theta^\alpha\theta^{\alpha^*} \qquad F=i\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\theta^\alpha\wedge\theta^{\alpha^*} \qquad \eta=i^n\theta^0\wedge\theta^1\wedge\ldots\wedge\theta^{2n}$$

On passe d'un repère réel adapté, à un autre de même origine par une matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & B & C\\ 0 & -C & B\end{pmatrix} \quad \text{où } B+iC=A\in U(n) \quad \text{(groupe unitaire)}$$

A ce changement de repères réels est associé un changement de repères complexes défini par la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & \overline{A}\end{pmatrix}$$

Nous désignerons respectivement par $\overset{a}{\varepsilon}(V_{2n+1})$ et $\overset{b}{\varepsilon}(V_{2n+1})$ les espaces fibrés principaux constitués par tous les repères, des deux catégories précédentes, en tous les points de V_{2n+1}. Ils ont pour base V_{2n+1} et pour groupes structuraux les groupes, isomorphes à $U(n)$, constitués respectivement par les matrices des deux types ci-dessus.

Nous désignerons par $\overset{c}{\varepsilon}(V_{2n+1})$ l'espace fibré principal formé par les sous-repères $(\varepsilon_0, \varepsilon_\alpha)$ des repères complexes $(\varepsilon_0, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha^*})$ adaptés à la structure presque-cohermitienne.

§ 12. - Exemples de variétés presque-cohermitiennes.

Considérons l'espace numérique complexe $\boldsymbol{C}^{n+1}$ muni de sa structure d'espace unitaire, définie comme suit. Si z^A $(A = 1, 2, \ldots,$

$n+1$) sont les coordonnées canoniques complexes d'un point P de $\boldsymbol{C}^{n+1}$ et si u^A sont les composantes correspondantes d'un vecteur $\vec{u}$ d'origine P, prenons la métrique canonique définie par le produit scalaire

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_A (u^A \overline{v^A} + \overline{u^A} v^A)$$

Cette métrique est euclidienne et invariante par l'opérateur $\mathfrak{I}$ de la structure presque-complexe canonique $(\mathfrak{I}\vec{v})^A = iv^A$. Ainsi se trouve définie sur $\boldsymbol{C}^{n+1}$ une structure presque-hermitienne qui a pour 2-forme fondamentale $F = i dz^A \wedge d\overline{z^A}$. C'est même une structure kählerienne.

L'équation $2\sum_A z^A \overline{z^A} = 1$ définit la sphère S_{2n+1} centrée à l'origine 0. En chaque point $P,(z^A)$, de cette sphère, le vecteur $\vec{E},(iz^A)$, est perpendiculaire à $\overrightarrow{OP}$, donc tangent à S_{2n+1} et sa norme vaut 1. Soit H le $2n$-plan tangent à la sphère en P et perpendiculaire à $\vec{E}$. Il est défini par

$$(v^A) = \vec{v} \in H \leftrightarrow \begin{cases} \sum_A (z^A \overline{v^A} + \overline{z^A} v^A) = 0 \\ \sum_A (iz^A \overline{v^A} + \overline{iz^A} v^A) = 0 \end{cases}$$

Cette dernière équation peut s'écrire $\omega(\vec{v}) = 0$, si l'on pose $\omega = \sum iz^A \, d\overline{z^A} - iz^{\overline{A}} \, dz^A$. D'après ces équations on vérifie aisément que l'opérateur $\mathfrak{I}$ laisse H invariant. Evidemment sa restriction à H a pour carré -1. On a ainsi défini sur S_{2n+1} une structure presque-cohermitienne. Ses deux formes fondamentales sont les formes induites sur S_{2n+1} par ω et par F. En l'occurrence elles vérifient $d\omega = 2F$.

De même sur toute variété différentiable orientable V_{2n+1} de dimension $2n+1$ plongée dans une variété presque hermitienne V_{2n+2}, on peut définir une structure presque-cohermitienne. En effet, il existe alors un champ différentiable de vecteurs $\vec{n}$ normés et normaux à V_{2n+1}, pour la métrique de V_{2n+2}. Si $\mathfrak{I}$ est l'opérateur presque-complexe de V_{2n+2}, les vecteurs $\vec{E} = \mathfrak{I}\vec{n}$ sont normés et

perpendiculaires aux précédents, donc tangents à V_{2n+1}. En chaque point P de V_{2n+1}, le 2-plan défini par $\vec{n}$ et $\vec{E}$ est invariant par $\mathfrak{J}$. Le $2n$-plan Π orthogonal à $\vec{n}$ et $\vec{E}$ est donc aussi invariant par $\mathfrak{J}$ et il est tangent à V_{2n+1}. Le champ E, le champ Π et la restriction de $\mathfrak{J}$ à Π définissent donc avec la métrique induite sur V_{2n+1} une structure presque-cohermitienne.

D'après la relation $F(\vec{u}, \vec{v}) = g(\mathfrak{J}\vec{u}, \vec{v})$ qui est valable aussi bien pour les structures presque hermitiennes que pour les structures presque-cohermitiennes, on voit que la 2-forme fondamentale de V_{2n+1} est la restriction de celle de V_{2n+2}. La 1-forme fondamentale ω de V_{2n+1} est donnée par $\omega(\vec{u}) = g(\vec{E}, \vec{u})$.

§ 13. - Les opérateurs L et Λ pour une variété presque-cohermitienne.

1) Lemme. - *Sur une variété presque-cocomplexe, de même que sur une variété presque-cosymplectique, toute r-forme α (ponctuelle, resp. globale) peut d'une façon unique se mettre sous la forme*

$$\alpha = \omega \wedge \beta + \gamma \tag{13.1}$$

où β et γ sont des formes horizontales (ponctuelles, resp. globales).

Dans cet énoncé, ω désigne une 1-forme fixée parmi celles qui définissent le champ des hyperplans horizontaux. Si (ω^i) désigne un champ local de corepères adaptés à la structure, β et γ ne doivent s'exprimer qu'au moyen des ω^i à l'exclusion de ω^0. Pour cela, si E est un champ de vecteurs verticaux dépourvu de zéro, il faut et suffit que $i(E)\beta = 0$ et $i(E)\gamma = 0$. Si l'on choisit E tel que $i(E)\omega = 1$, on obtient aisément, sachant que $i(E)$ est une antidérivation:

$$\beta = i(E)\,\alpha \qquad \gamma = i(E)\,e(\omega)\,\alpha \tag{13.2}$$

où $e(\omega)$ représente le produit extérieur par ω: $e(\omega)\,\alpha = \omega \wedge \alpha$.

2) Pour une variété presque-cohermitienne dont la 1-forme et la 2-forme fondamentales sont désignées par ω et F, on posera $L = e(F)$, $\Lambda = i(F)$, où $e(F)$ représente le produit extérieur par

F, et $i(F)$ le produit intérieur par F relativement à la métrique. Cette structure presque-cohermitienne induisant sur chaque hyperplan horizontal H_x une structure vectorielle hermitienne, les résultats de LICHNEROWICZ [1] § 98 au sujet des espaces vectoriels hermitiens restent encore valables ici pour une r-forme horizontale γ, en particulier :

$$(13.3) \qquad (\Lambda L - L\Lambda)\,\gamma = (n-r)\,\gamma$$

Pour une r-forme quelconque α, nous utiliserons la décomposition (13-1) qui peut s'écrire $\alpha = e(\omega)\beta + \gamma$. D'après les propriétés du produit extérieur, L commute avec $e(\omega)$. Pour étudier la commutation de $\Lambda = i(F)$ avec $e(\omega)$, remarquons que $i(F)e(\omega)$ est opérateur transposé de $i(E)e(F)$, où E désigne le champ vertical canonique défini comme ci-dessus. Or $i(E)$ est une antidérivation, d'où

$$i(E)\,e(F) = e(i(E)F) + e(F)\,i(E)$$

Comme $i(E)F$ est nul, puisque E est vertical, on en déduit que $i(E)$ et $e(F)$ commutent. Il en est donc de même de leurs opérateurs transposés $e(\omega)$ et $i(F)$. Ainsi donc pour $\alpha = \omega \wedge \beta + \gamma$, on aura d'après (13.3) :

$$(13.5) \qquad (\Lambda L - L\Lambda)\,\alpha = \omega \wedge (n-r+1)\,\beta + (n-r)\,\gamma$$

3) Les résultats de [1] § 99 sur la décomposition de HODGE-LEPAGE s'appliquent ici aux r-formes horizontales γ_r. En particulier pour $r \leqslant n-1$, l'équation $F \wedge \gamma_r = 0$ entraine $\gamma_r = 0$. D'après la décomposition $\alpha_r = \omega \wedge \beta_{r-1} + \gamma_r$ pour une r-forme quelconque α_r, on voit que l'équation $F \wedge \alpha_r = 0$ entraine aussi $\alpha_r = 0$.

IV. - CONNEXIONS PRESQUE-COHERMITIENNES.

§ 14. - CONNEXIONS « PRESQUE-COHERMITIENNES ».

Nous appellerons ainsi les connexions infinitésimales sur l'espace fibré principal $\overset{c}{\varepsilon}(V_{2n+1})$ défini au paragraphe 11. On les identifiera

aux connexions correspondantes sur $\overset{a}{\varepsilon}(V_{2n+1})$ et $\overset{b}{\varepsilon}(V_{2n+1})$. Pour une section locale de $\overset{c}{\varepsilon}(V_{2n+1})$, une telle connexion peut être définie par une 1-forme matricielle $(\pi_0^0, \pi_\beta^\alpha)$ prenant ses valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe structural $1\times U(n)$, c'est-à-dire telle que

$$\pi_0^0=0 \qquad \pi_\beta^\alpha=-\overline{\pi}_\alpha^\beta \tag{14.1}$$

Cette dernière relation s'obtient en différentiant la relation $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A_\alpha^\lambda \overline{A}_\beta^\lambda = \delta_{\alpha\beta}$, caractéristique des matrices appartenant à $U(n)$, pour $(A_\alpha^\lambda) = Id \in U(n)$, c'est-à-dire pour $A_\alpha^\lambda=\delta_\alpha^\lambda$

$\overset{a}{\varepsilon}(V_{2n+1})$ étant l'intersection de $E^a(V_{2n+1})$ avec $\varepsilon(V_{2n+1})$ espace fibré de tous les repères orthonormés, il en résulte qu'une connexion presque-cohermitienne s'identifie à une connexion presque-cocomplexe et à une connexion euclidienne, lesquelles s'identifient à une même connexion linéaire réelle.

Pour qu'une connexion linéaire réelle sur une variété presque-cohermitienne soit presque-cohermitienne, il faut et suffit que les différentielles absolues du tenseur presque-cocomplexe et du tenseur métrique soient nulles. D'après la différentiation absolue d'un produit contracté, on voit que la différentielle absolue de la 2-forme F est alors nulle aussi. De même pour la 1-forme ω, car $\nabla\omega_B=d(\omega_B)-\pi_B^0=0$. Ainsi F et ω sont invariantes par le groupe d'holonomie d'une telle connexion.

Le tenseur $\mathfrak{J}$ est aussi un produit contracté de g par F. Donc si g et F ont leurs dérivées covariantes nulles pour une connexion linéaire, $\mathfrak{J}$ a aussi sa dérivée covariante nulle ; et par conséquent la connexion est presque-cohermitienne.

En repères complexes adaptés à la structure presque-cohermitienne, pour la torsion et la courbure d'une telle connexion, certaines des relations (9.1) et (6.3) se simplifient ainsi

$$\Sigma^0=d\theta^0 \qquad \Omega_0^0=0$$

La relation $\pi_\alpha^\beta=-\overline{\pi_\beta^\alpha}$ entraine de plus $\Omega_\alpha^\beta=-\overline{\Omega_\beta^\alpha}$, d'où l'on tire

$$i\Omega_\alpha^\alpha=-\overline{i\Omega_\alpha^\alpha}$$

De plus on tire de (6.3)

$$\Omega_{\alpha}^{\alpha}=d\pi_{\alpha}^{\alpha}.$$

La 2-forme globale $i\Omega_{\alpha}^{\alpha}$ à valeurs scalaires est donc réelle et fermée. Sa classe de cohomologie reste fixe si on change de connexion presque-cohermitienne: en effet pour deux telles connexions (π_{β}^{α}) et $(\widehat{\pi}_{\beta}^{\alpha})$, les 1-formes locales $i(\widehat{\pi}_{\alpha}^{\alpha}-\pi_{\alpha}^{\alpha})$ définissent sur V_{2n+1} une 1-forme globale réelle. Nous appellerons forme de Chern de la connexion la 2-forme

$$\Psi=\frac{1}{2\pi}\ i\Omega_{\alpha}^{\alpha} \qquad (\pi=3,14159...)$$

§ 15. - Première connexion canonique d'une variété presque-cohermitienne.

En repères réels adaptés à cette structure presque-cohermitienne, les connexions qui sont euclidiennes pour la structure riemannienne sous-jacente vérifient $\omega_{B}^{A}+\omega_{A}^{B}=0$. D'après (7.2) cette condition se traduit, en repères complexes adaptés, par

$$\pi_{B}^{A}+\pi_{A^{*}}^{B^{*}}=0 \tag{15.1}$$

On a en particulier $\pi_{0}^{0}=0$ et $\pi_{\alpha}^{\beta}=-\overline{\pi_{\beta}^{\alpha}}$. La connexion presque-cocomplexe induite par une connexion euclidienne est donc aussi euclidienne et par conséquent presque-cohermitienne.

Définition. - *Première connexion canonique d'une variété presque-cohermitienne: c'est la connexion presque-cohermitienne induite par la connexion riemannienne.*

Sa forme de torsion est donnée par (9.3).

Remarque. - Soit une variété riemannienne quelconque rapportée à des champs locaux de repères orthonormés. Si les formes (ω_{B}^{A}) définissent une connexion linéaire, les formes $\frac{1}{2}\ (\omega_{B}^{A}-\omega_{A}^{B})$ définissent une connexion euclidienne. On définit ainsi une projection

de l'espace, affine sur R, des connexions linéaires sur son sous-espace constitué par les connexions euclidiennes.

Dans le cas présent, cette projection est définie en repères complexes adaptés à la structure presque-cohermitienne par: $\pi^A_B \to \frac{1}{2}(\pi^A_B - \pi^{B^*}_{A^*})$. Elle permute avec la projection, définie au § 7 sous le nom d'induction, d'une connexion linéaire sur une connexion presque-cocomplexe.

§ 16. - Différentielles absolues des formes F et ω pour la connexion riemannienne.

1) Faisons les calculs en repères complexes adaptés à la structure presque-cohermitienne, en supposant d'abord seulement que la connexion est euclidienne.

$$F_{00}=0 \qquad F_{\alpha B}=i\delta^{\alpha^*}_B \qquad F_{\alpha^* B}=-i\delta^{\alpha}_B \qquad \omega_A=\delta^0_A$$

$$DF_{AB}=d(F_{AB}) \quad \pi^R_A F_{RB}-\pi^R_B F_{AR} \qquad D\omega_A=d(\omega_A) \quad \pi^R_A \omega_R$$

$$(16.2)\quad \left\{\begin{array}{ll} DF_{00}=0 & DF_{\alpha\beta^*}=-i\pi^\beta_\alpha - i\pi^{\alpha^*}_{\beta^*}=0 \\ DF_{0\beta}=i\pi^{\beta^*}_0=-i\pi^0_\beta & DF_{\alpha\beta}=i\pi^{\beta^*}_\alpha - i\pi^{\alpha^*}_\beta = 2i\pi^{\beta^*}_\alpha = -2i\pi^{\alpha^*}_\beta \\ DF_{0\beta^*}=-i\pi^\beta_0 = i\pi^0_{\beta^*} & DF_{\alpha^*\beta^*}=-i\pi^\beta_{\alpha^*}+i\pi^\alpha_{\beta^*}=-2i\pi^\beta_{\alpha^*}=2i\pi^\alpha_{\beta^*} \end{array}\right.$$

$$(16.3)\quad \left\{\begin{array}{lll} & D\omega_A=-\pi^0_A=\pi^{A^*}_0 & \\ D\omega_0=0 & D\omega_\beta=-iDF_{0\beta} & D\omega_{\beta^*}=iDF_{0\beta^*} \end{array}\right.$$

S'il s'agit de la connexion riemannienne, on obtient de plus:

$$(16.4)\quad \left\{\begin{array}{l} (dF)_{\alpha\beta\gamma^*}=D_\alpha F_{\beta\gamma^*}+D_\beta F_{\gamma^*\alpha}+D_{\gamma^*}F_{\alpha\beta}=D_{\gamma^*}F_{\alpha\beta}=2i\gamma^{\beta^*}_{\alpha\gamma^*}=2i\gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma^*} \\ (dF)_{0\beta\gamma^*}=D_\beta F_{\gamma^*0}+D_{\gamma^*}F_{0\beta}=-i(\gamma^0_{\gamma^*\beta}+\gamma^0_{\beta\gamma^*}) \end{array}\right.$$

$$(16.5)\qquad (d\omega)_{AB}=D_A\omega_B-D_B\omega_A=-\gamma^0_{BA}+\gamma^0_{AB}$$

2) Relation avec la torsion de la structure presque-cocomplexe. D'après la définition du paragraphe 5 et les formules (9.3), on a

pour la connexion riemannienne:

$$(d\omega)_{ij}=t^0_{ij}-\gamma^0_{ij}-\gamma^0_{ji} \qquad \begin{cases} t^\alpha_{0\gamma^*}=\gamma^\alpha_{0\gamma^*}-\gamma^\alpha_{\gamma^*0} \\ t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}=\gamma^\alpha_{\beta^*\gamma^*}-\gamma^\alpha_{\gamma^*\beta^*} \end{cases}$$

On déduit alors des formules (16.2):

$$(16.7) \qquad \begin{cases} t^0_{\beta\gamma}=iD_\gamma F_{0\beta}-iD_\beta F_{0\gamma}=i\,[(dF)_{0\beta\gamma}-D_0F_{\beta\gamma}] \\ t^0_{\beta\gamma^*}=iD_{\gamma^*}F_{0\beta}-iD_\beta F_{0\gamma^*}=i\,[(dF)_{0\beta\gamma^*}+2D_\beta F_{0\gamma^*}] \\ t^0_{\beta^*\gamma^*}=-iD_{\gamma^*}F_{0\beta^*}+iD_{\beta^*}F_{0\gamma^*}=-i\,[(dF)_{0\beta^*\gamma^*}-D_0F_{\beta^*\gamma^*}] \end{cases}$$

$$(16.8) \qquad \begin{cases} t^\alpha_{0\gamma^*}=iD_{\gamma^*}F_{0\alpha^*}-\dfrac{i}{2}\,D_0F_{\gamma^*\alpha^*} \\ t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}=\dfrac{i}{2}\,(D_{\gamma^*}F_{\beta^*\alpha^*}-D_{\beta^*}F_{\gamma^*\alpha^*})=\dfrac{-i}{2}\,[(dF)_{\alpha^*\beta^*\gamma^*}-D_{\alpha^*}F_{\beta^*\gamma^*}] \end{cases}$$

§ 17. - Tenseur de structure d'une variété presque-cohermitienne. Seconde connexion canonique.

Soient $\pi^A_B=\gamma^A_{BD}\,\theta^D$ les 1-formes définissant la connexion riemannienne par rapport à un champ local de corepères complexes (θ^A) adaptés à la structure presque-cohermitienne. Cette connexion est définie par les conditions

$$(17.1) \qquad \pi^A_B+\pi^{B^*}_{A^*}=0 \qquad d\theta^A=\theta^B\wedge\pi^A_B \qquad \pi^{B^*}_{A^*}=\overline{\pi^B_A}$$

La première connexion canonique $\overset{1}{\gamma}$ est définie par les formes π^α_β. Soit une deuxième connexion presque-cohermitienne λ définie par des formes $\tilde\omega^\alpha_\beta=\lambda^\alpha_{\beta A}\theta^A$ qui vérifient aussi $\tilde\omega^\alpha_\beta+\overline{\tilde\omega^\beta_\alpha}=0$. Si nous posons $\tilde\omega^\alpha_\beta-\pi^\alpha_\beta=\xi^\alpha_{\beta A}\,\theta^A$, les coefficients $\xi^\alpha_{\beta A}=\lambda^\alpha_{\beta A}-\gamma^\alpha_{\beta A}$ et leurs conjugués définissent un tenseur ξ qui vérifie

$$(17.2) \qquad \xi^\alpha_{\beta A}+\xi^{\beta^*}_{\alpha^* A}=0 \qquad \xi^0_{AB}=\xi^A_{0B}=\xi^\alpha_{\beta^* A}=\xi^{\alpha^*}_{\beta A}=0$$

Soient $\overset{1}{\Sigma}$ et Σ les 2-formes respectives de torsion des connexions $\overset{1}{\gamma}$ et λ, et soient $\overset{1}{t}$ et t les tenseurs de torsion correspondants.

D'après les relations (9.1) on obtient:

$$(17.3)\quad \begin{cases} \Sigma^0 - \overset{1}{\Sigma}{}^0 = 0 \\ \Sigma^\alpha - \overset{1}{\Sigma}{}^\alpha = (\tilde{\omega}^\alpha_\beta - \imath t^\alpha_\beta) \wedge \theta^\beta = \xi^\alpha_{\beta 0}\theta^0 \wedge \theta^\beta + \frac{1}{2}(\xi^\alpha_{\beta\gamma} - \xi^\alpha_{\gamma\beta})\,\theta^\gamma \wedge \theta^\beta + \xi^\alpha_{\beta\gamma^*}\theta^{\gamma^*} \wedge \theta^\beta \end{cases}$$

Désignons par $A\xi = v$ le tenseur obtenu en antisymétrisant le tenseur ξ par rapport à ses deux indices covariants

$$(17.4,\, a, b, c)\quad \begin{cases} v^\alpha_{\beta 0} = \xi^\alpha_{\beta 0} = -\, v^\alpha_{0\beta} \\ v^\alpha_{\beta\gamma} = \xi^\alpha_{\beta\gamma} - \xi^\alpha_{\gamma\beta} \\ v^\alpha_{\beta\gamma^*} = \xi^\alpha_{\beta\gamma^*} = -\, v^\alpha_{\gamma^*\beta} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{et f.c.c.} \\ \text{(signifiera: formules} \\ \text{complexes conjuguées)} \end{array}$$

Les conditions (17.2) entrainent pour le tenseur $A\xi = v$ les conditions

$$(17.5)\qquad v^\alpha_{\beta 0} + v^{\beta^*}_{\alpha^* 0} = 0 \qquad v^\alpha_{\beta\gamma} = -\, v^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma} + v^{\gamma^*}_{\alpha^*\beta} \qquad \text{et f.c.c.}$$

$$(17.6)\qquad v^0_{AB} = v^\alpha_{\lambda^* 0} = v^\alpha_{\lambda^*\mu^*} = 0 \qquad \text{et f.c.c.}$$

Soit P l'espace des tenseurs réels (v^1_{BD}) antisymétriques pour la covariance et soit V son sous-espace constitué par ceux qui vérifient ces conditions (17.5) et (17.6). Etant donné un tenseur $v \in V$, on en déduit $\xi^\alpha_{\beta 0}$ et $\xi^\alpha_{\beta\gamma^*}$ par (17.4a) et (17.4c), puis $\xi^\alpha_{\beta\gamma}$ par (17.2), et on constate alors que (17.4b) est vérifiée. Ainsi pour tout $v \in V$ il y a une connexion presque-cohermitienne et une seule qui admet pour tenseur de torsion $\overset{1}{t} + v$.

Cherchons dans l'espace P un sous-espace W qui soit supplémentaire de V et qui soit aussi invariant par $R(G)$, c'est-à-dire que les équations qui définissent W doivent être invariantes par les changements de repères $(A^0_{0'}, A^\alpha_{\lambda'}) \in G = 1 \times U(n)$. On vérifie aisément qu'il en est ainsi pour le sous-espace W défini par les équations:

$$(17.7)\qquad v^\alpha_{\beta 0} - v^{\beta^*}_{\alpha^* 0} = 0 \qquad v^\gamma_{\alpha\beta^*} = 0 \qquad \text{et f.c.c.}$$

En effet la condition $(A^\alpha_{\lambda'}) \in U(n)$ s'écrit $A^\alpha_{\lambda'} = \overline{A^{\lambda'}_\alpha}$, d'où

$$v^\alpha_{\beta 0} \pm v^{\beta^*}_{\alpha^* 0} = A^\alpha_{\lambda'} A^{\mu'}_\beta\, (v^{\lambda'}_{\mu' 0'} \pm v^{\mu'^*}_{\lambda'^* 0'})$$

On pourrait définir un deuxième sous-espace, répondant aux mêmes conditions que W, par les équations

$$(17.8) \qquad v^{\alpha}_{\beta 0} - v^{\beta^*}_{\alpha^* 0} = 0 \qquad v^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \qquad v^{\beta}_{\alpha\gamma^*} + v^{\gamma}_{\alpha\beta^*} = 0 \qquad \text{et f.c.c.}$$

Mais nous prendrons dorénavant celui qui est défini par les équations (17.7), lesquelles sont plus simples.

D'après les équations (17.3) on a $t - \overset{1}{t} \in V$, donc si on décompose le tenseur de torsion t d'une connexion presque-cohermitienne λ en ses deux composantes selon V et W, la composante sur W sera indépendante de λ, et l'autre composante pourra varier arbitrairement dans V. Cette composante invariable sur W peut être identifiée au tenseur de structure (cf. [9]) de la structure presque-cohermitienne. Il existe une connexion presque-cohermitienne et une seule dont la torsion ait une composante nulle sur V :

Définition. - *Seconde connexion canonique d'une variété presque-cohermitienne: c'est la connexion presque-cohermitienne dont le tenseur de torsion vérifie les équations* (17.7).

Déterminons-la à partir de la connexion riemannienne. $\overset{1}{\Sigma}$ étant donnée par (9.3) avec $\pi^0_0 = 0$, le système (17.3) s'écrit

$$\begin{cases} \Sigma^{\alpha} = (\xi^{\alpha}_{\beta 0} + \gamma^{\alpha}_{0\beta})\,\theta^0 \wedge \theta^{\beta} + \xi^{\alpha}_{\beta\mu}\theta^{\mu} \wedge \theta^{\beta} + (\xi^{\alpha}_{\beta\mu^*} + \gamma^{\alpha}_{\mu^*\beta})\,\theta^{\mu^*} \wedge \theta^{\beta} + T^{\alpha} \\ \Sigma^0 = d\theta^0 = d\omega = \gamma^0_{j0}\,\theta^j \wedge \theta^0 + T^0 \end{cases}$$

Pour ce tenseur de torsion les équations (17.7) s'écrivent

$$\xi^{\alpha}_{\beta 0} + \gamma^{\alpha}_{0\beta} = \xi^{\beta^*}_{\alpha^* 0} + \gamma^{\beta^*}_{0\alpha^*} \qquad \xi^{\alpha}_{\beta\mu^*} + \gamma^{\alpha}_{\mu^*\beta} = 0 \qquad \text{et f.c.c.}$$

Utilisant (17.2) et (17.1), on en tire

$$(17.9) \qquad \xi^{\alpha}_{\beta 0} = \frac{1}{2}\,(\gamma^0_{\alpha^*\beta} - \gamma^0_{\beta\alpha^*}) \qquad \xi^{\alpha}_{\beta\mu^*} = -\gamma^{\alpha}_{\mu^*\beta} \qquad \xi^{\alpha}_{\beta\mu} = \gamma^{\beta^*}_{\mu\alpha^*} \qquad \text{et f.c.c.}$$

La seconde connexion canonique et sa torsion sont donc ainsi définies :

$$(17.10) \qquad \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \pi^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{2}\,(\gamma^0_{\alpha^*\beta} - \gamma^0_{\beta\alpha^*})\,\theta^0 + \gamma^{\beta^*}_{\mu\alpha^*}\,\theta^{\mu} - \gamma^{\alpha}_{\mu^*\beta}\,\theta^{\mu^*}$$

$$(17.11)\qquad \begin{cases} \Sigma^0 = d\omega = \gamma^0_{j0}\,\theta^j \wedge \theta^0 + T^0 \\ \Sigma^\alpha = \dfrac{1}{2}\,(\gamma^0_{\alpha^*\beta} + \gamma^0_{\beta\alpha^*})\,\theta^0 \wedge \theta^\beta + \gamma^{\beta^*}_{\alpha\alpha^*}\theta^\alpha \wedge \theta^{\beta^*} + T^\alpha \end{cases}$$

Remarques.

1) D'après (17.10), (16.4) et (16.5), pour que les deux connexions canoniques coïncident, il faut et suffit que

$$(d\omega)_{\alpha^*\beta} = 0 \qquad (dF)_{\alpha\beta\gamma^*} = 0$$

2) D'après (17.11) et (16.4), pour que la torsion de la deuxième connexion canonique se réduise à la torsion de la structure presque-cocomplexe sous-jacente, il faut et suffit que

$$(dF)_{0\beta\gamma^*} = 0 \qquad (dF)_{\alpha\beta\gamma^*} = 0 \qquad (d\omega)_{j0} = 0$$

Cette dernière condition peut s'écrire $i(E)d\omega = 0$.

Toutes ces conditions sont réalisées en particulier dans le cas des variétés presque-cokählériennes, que nous allons définir tout à l'heure.

V. - Cas spéciaux. Structures cokählériennes.

§ 18. - Structure « presque-cokählérienne ».

Nous appellerons ainsi une structure presque-cohermitienne telle que $d\omega = 0$ et $dF = 0$, c'est-à-dire subordonnée à une structure cosymplectique.

Dans ce cas, il existe des coordonnées locales $(x^0,\ x^i)$, dites canoniques pour la structure cosymplectique, telles que $\omega = dx^0$ $F = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} dx^\alpha \wedge dx^{\alpha^*}$. L'équation de Pfaff $\omega = 0$, qui est complètement intégrable, détermine des variétés horizontales, définies dans un domaine de coordonnées canoniques par $x^0 =$ constante. Sur chacune de ces variétés, la structure presque cokählérienne de V_{2n+1}

induit une structure presque kählerienne dont la forme fondamentale a, pour les coordonnées (x^i), même expression que F pour les (x^0, x^i).

D'après la définition de la torsion, sa composante T^0 est nulle: $t^0_{ij}=(d\omega)_{ij}=0$.

Les formules (16.7) donnent alors:

$$(18.1)\qquad D_0F_{\beta\gamma}=0 \qquad D_\gamma F_{0\beta}=D_\beta F_{0\gamma} \qquad D_\beta F_{0\gamma^*}=0 \qquad \text{et f.c.c.}$$

De (16.2) et (16.4) on tire

$$D_A F_{\beta\gamma^*}=0 \qquad D_{\gamma^*}F_{\alpha\beta}=0 \qquad \text{et f.c.c.}$$

Le système (16.8) s'écrit alors

$$t^\alpha_{0\gamma^*}=iD_{\gamma^*}F_{0\alpha^*}=D_{\gamma^*}\omega_{\alpha^*} \qquad t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}=\frac{i}{2}\ D_{\alpha^*}F_{\beta^*\gamma^*}$$

De (16.5) et (16.3) on tire

$$D_0\omega_B=0 \qquad D_0F_{0B}=0$$

De (16.3) et (18.1) on tire $\qquad D_\beta\omega_{\gamma^*}=0 \qquad$ et f.c.c.

Calculons maintenant les codifférentielles de F et ω, en remarquant que $g_{AB}=\delta^{A^*}_B$.

$$\delta\omega=-D^B\omega_B=-\sum_B D_{B^*}\omega_B=0$$

$$(\delta F)_0=D^BF_{0B}=\sum_B D_{B^*}F_{0B}=0$$

$$(\delta F)_\alpha=D_0F_{\alpha 0}+\sum_i D_{i^*}F_{\alpha i}=0$$

Théorème. - *Dans une structure presque-cokählerienne, F et ω sont non seulement fermées, mais aussi cofermées.*

Il en résulte en particulier que F et ω sont harmoniques. Or on sait que sur une variété riemannienne compacte et orientable toute forme harmonique est invariante par les isométries infinitésimales. Dans ce cas le tenseur $\mathfrak{I}$, qui est un produit contracté des tenseurs F et g, est aussi invariant. On en conclut:

COROLLAIRE. - *Sur une variété presque-cokählerienne compacte, le plus grand groupe connexe d'isométries coïncide avec le plus grand groupe connexe d'automorphismes de la structure presque-cokählerienne.*

§ 19. - STRUCTURE « COHERMITIENNE ».

Nous appellerons ainsi une structure presque-cohermitienne subordonnée à une structure cocomplexe. La torsion (T^0, T^α) est nulle. Il y a alors des variétés horizontales, sur lesquelles se trouve induite une structure hermitienne. A partir des relations (16.8) et (16.7) on obtient :

$$D_\alpha F_{\beta\gamma} = (dF)_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$D_0 F_{\beta\gamma} = D_\beta F_{0\gamma} = (dF)_{0\beta\gamma} = 0$$

$$(dF)_{0\beta\gamma^*} = -\,2D_\beta F_{0\gamma^*} = 2D_{\gamma^*} F_{0\beta} = 2i\gamma^{\beta^*}_{0\gamma^*}$$

Pour la seconde connexion canonique, les formes de torsion Σ^α ne contiennent que des termes en $\theta^0 \wedge \theta^\beta$ et $\theta^\beta \wedge \theta^\gamma$, d'autre part $d\theta^0$ et les $d\theta^\beta$ ne contiennent pas de termes en $\theta^{\lambda^*} \wedge \theta^{\mu^*}$ (cf. § 5 avec $T^0 = T^\beta = 0$), donc $d\Sigma^\alpha$ ne contient pas de termes en $\theta^\beta \wedge \theta^{\lambda^*} \wedge \theta^{\mu^*}$. D'après l'identité de BIANCHI $d\Sigma^\alpha = \Omega^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta - \tilde{\omega}^\alpha_\beta \wedge \Sigma^\beta$, il en résulte :

$$R^\alpha_{\beta,\,\lambda^*\mu^*} = 0$$

Comme on a $\Omega^\alpha_\beta + \Omega^{\beta^*}_{\alpha^*} = 0$, on en déduit $R^{\beta^*}_{\alpha^*,\,\lambda^*\mu^*} = 0$, d'où

$$R^\alpha_{\beta,\,\lambda\mu} = 0$$

Calculons les coefficients Γ^A_{BM} de la seconde connexion canonique, en coordonnées locales cocomplexes (x^0, z^α). Cette connexion étant presque-cocomplexe, ses seuls coefficients non nuls sont de types Γ^0_{0M}, $\Gamma^\alpha_{\beta M}$ et f.c.c. Sa torsion Σ^α ne contenant pas de termes en $dz^\beta \wedge dz^{\gamma^*}$, on a donc $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma^*} - \Gamma^\alpha_{\gamma^*\beta} = 0$, d'où

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma^*} = 0 \qquad \text{et f.c.c.}$$

Cette connexion étant euclidienne, la dérivée covariante du

tenseur métrique est nulle

$$\begin{cases} \partial_\gamma g_{\beta\lambda^*} - \Gamma^{\varrho}_{\beta\gamma} g_{\varrho\lambda^*} - \Gamma^{\varrho^*}_{\lambda^*\gamma} g_{\beta\varrho^*} = \nabla_\gamma g_{\beta\lambda^*} = 0 \\ \partial_M g_{00} - 2\Gamma^0_{0M} g_{00} = \nabla_M g_{00} = 0 \end{cases}$$

Or $\Gamma^{\varrho^*}_{\lambda^*\gamma} = 0$, d'où

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\lambda^*} \partial_\gamma g_{\beta\lambda^*} \qquad \Gamma^0_{0M} = \frac{1}{2}\, g^{00} \partial_M g_{00}$$

D'après la fin du § 7, les relations $\gamma^0_{\alpha^*\beta} = \gamma^0_{\beta\alpha^*}$ qui sont vérifiées par la connexion riemannienne pour les repères naturels de coordonnées cocomplexes, restent valables aussi pour les repères adaptés à la structure presque-cohermitienne. Ainsi dans la formule (17.10) les différences $\bar{\omega}^{\alpha}_{\beta} - \pi^{\alpha}_{\beta}$ sont horizontales et ceci reste valable aussi pour les repères naturels de coordonnées cocomplexes. On a donc $\Gamma^{\alpha}_{\beta 0} - \gamma^{\alpha}_{\beta 0} = 0$ avec $\gamma^{\alpha}_{\beta 0} = g^{\alpha\lambda^*}[\beta 0, \lambda^*]$, d'où :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta 0} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda^*} \partial_0 g_{\beta\lambda^*}$$

§ 20. - Structure presque-cohermitienne subordonnée à une structure pfaffienne.

C'est le cas où $F = d\omega$. Supposons plus généralement $d\omega = kF$ où k est une constante réelle non nulle, cas que l'on pourrait d'ailleurs ramener au précédent en changeant ω en ω/k et en modifiant la métrique par réduction des composantes verticales dans le même rapport. On a donc $d\omega \neq 0$ et $dF = 0$. D'après la remarque 2 du § 17, la torsion de la seconde connexion canonique coïncide avec la torsion de la structure presque-cocomplexe sous-jacente.

La 2-forme $d\omega$ étant alors horizontale, la composante T^0 de la torsion de la structure presque-cocomplexe est égale à $d\omega$: $T^0 = d\omega = kF$.

Les relations (16.3) (16.4) et (16.7) donnent:

$$D_0 F_{0\beta} = i D_0 \omega_\beta = i\,(D_0 \omega_\beta - D_\beta \omega_0) = i(d\omega)_{0\beta} = ikF_{0\beta}$$

$$D_{\gamma^*}F_{\alpha\beta}=0 \qquad D_\beta F_{0\gamma^*}=D_{\gamma^*}F_{0\beta}=\frac{1}{2i}\,kF_{\beta\gamma^*} \qquad D_0F_{\beta\gamma}=ikF_{\beta\gamma}$$

On en tire

$$D_0F_{0\beta}=0 \quad D_{\gamma^*}F_{\alpha\beta}=0 \quad D_0F_{\beta\gamma}=0 \quad D_\beta F_{0\gamma^*}=D_{\gamma^*}F_{0\beta}=\frac{k}{2}\,\delta^\gamma_\beta \text{ et f.c.c.}$$

Calculons les codifférentielles de ω et de F, comme au § 18. On obtient ici: $\delta\omega=0$, $(\delta F)_0=kn$, $(\delta F)_\alpha=0$, c'est-à-dire

$$\delta\omega=0 \qquad \delta F=kn\omega$$

On en déduit en outre

$$\Delta\omega=k^2n\omega \qquad \Delta F=k^2nF$$

Cas où de plus $T^a=0$. Les relations (16.8) donnent alors:

$$D_{\gamma^*}F_{0\alpha^*}=0 \qquad D_{\alpha^*}F_{\beta^*\gamma^*}=0$$

Dans ce cas donc, les dérivées covariantes de F et ω ont toutes leurs composantes nulles, sauf celles qui sont du type

$$D_{\beta^*}F_{0\beta}=D_\beta F_{0\beta^*}=\frac{k}{2} \qquad D_{\beta^*}\omega_\beta=-\frac{ki}{2} \qquad D_\beta\omega_{\beta^*}=\frac{ki}{2}$$

§ 21. - Variété « cokählerienne ».

Nous appellerons ainsi toute variété presque-cokählerienne dont la structure presque-cocomplexe est intégrable, c'est-à-dire aussi bien toute variété cohermitienne vérifiant $dF=0$ et $d\omega=0$. Il y a alors des sous-variétés horizontales, sur lesquelles se trouve induite une structure kählerienne. En groupant les résultats des paragraphes 18 et 19, on constate que DF et $D\omega$ sont nulles; alors d'après (16.2) on a $\pi_0^{\beta^*}=\pi_\beta^0=\pi_0^\beta=\pi_{\beta^*}^0=\pi_\beta^{\alpha^*}=\pi_{\beta^*}^\alpha=0$, d'où:

Théorème. - *Sur une variété cokählerienne, les deux connexions canoniques coïncident avec la connexion riemannienne associée à*

la métrique, et les formes F et ω ont leurs dérivées covariantes nulles dans cette connexion.

Réciproque 1. - *Si la 2-forme F d'une variété presque cohermitienne a sa dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne, la variété est cokählerienne.*

En effet d'après (16.3) ω a aussi sa dérivée covariante nulle. F et ω sont donc fermées et d'après (16.7) et (16.8) la torsion de la structure est nulle.

Réciproque 2. - *Si une variété est presque-cohermitienne et si sa connexion riemannienne est aussi presque-cocomplexe, la variété est cokählerienne.*

Cela résulte des formules (16.2) jointes à la réciproque précédente. C'est en particulier le cas si l'une des deux connexions canoniques coïncide avec la connexion riemannienne.

Ces deux réciproques sont valables moyennant la conjecture du § 5.

a) Courbure de la connexion riemannienne. Cette connexion coïncidant alors avec la connexion presque-cocomplexe qu'elle induit, on a d'après § 6 en repères complexes adaptés à la structure presque-cocomplexe : $\Omega_0^{\alpha^*} = \Omega_\beta^{\alpha^*} = 0$. On en déduit $\Omega_{\gamma 0} = \Omega_{\gamma\beta} = 0$, donc $R_{\gamma 0,\, MN} = R_{\gamma\beta,\, MN} = 0$. Comme il s'agit d'une connexion riemannienne, il en résulte $R_{MN,\, \gamma 0} = R_{MN,\, \gamma\beta} = 0$ et f.c.c. Seules peuvent donc être non nulles les composantes du type $R_{\alpha\beta^*,\, \gamma\delta^*}$ et celles qui s'en déduisent par les antisymétries. Les Ω_B^A se réduisent donc à

$$\Omega_\beta^\alpha = R^\alpha_{\beta,\, \lambda\mu^*}\, \theta^\lambda \wedge \theta^{\mu^*} \qquad \text{et f.c.c.}$$

On retrouve ainsi le résultat du paragraphe 19 avec en plus $R^\alpha_{\beta,\, 0j} = 0$.

De la relation suivante connue pour toute connexion riemannienne $R_{\alpha\beta^*,\, \gamma\delta^*} + R_{\alpha\gamma,\, \delta^*\beta^*} + R_{\alpha\delta^*,\, \beta^*\gamma} = 0$ on tire ici

$$R_{\alpha\beta^*,\, \gamma\delta^*} = R_{\alpha\delta^*,\, \gamma\beta^*}$$

c'est-à-dire qu'on peut échanger deux indices du même type qui sont de part et d'autre de la virgule.

D'après cette remarque, l'expression $\Omega_\alpha^\alpha = R^\alpha_{\alpha,\,\lambda\mu^*}\theta^\lambda \wedge \theta^{\mu^*}$ devient $\Omega_\alpha^\alpha = R^\alpha_{\lambda,\,\alpha\mu^*}\theta^\lambda \wedge \theta^{\mu^*}$ c'est-à-dire $\Omega_\alpha^\alpha = R_{\lambda\mu^*}\,\theta^\lambda \wedge \theta^{\mu^*}$ où $R_{\lambda\mu^*} = R_{\mu^*\lambda}$ sont les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci, défini par $R_{BD} = R^A_{B,\,AD}$. La 2-forme de Chern ψ définie au § 14 s'écrit alors

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\; iR_{\lambda\mu^*}\,\theta^\lambda \wedge \theta^{\mu^*}$$

b) Rapportons la variété à des coordonnées locales cocomplexes (x^0, z^α), en choisissant x^0 telle que $\omega = dx^0$, ce qui est possible puisque ω est fermée.

$$ds^2 = (dx^0)^2 + 2g_{\alpha\beta^*}dz^\alpha dz^{\beta^*} \qquad F = ig_{\alpha\beta^*}dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*} \qquad \omega = dx^0$$

La condition $dF = 0$ se traduit par

$$\partial_0 g_{\alpha\beta^*} = 0 \qquad \partial_\lambda g_{\alpha\beta^*} = \partial_\alpha g_{\lambda\beta^*} \qquad \text{et f.c.c.}$$

Comme la connexion riemannienne coïncide avec la seconde connexion canonique, ses coefficients sont donnés par les formules du § 19. On constate ici que les seuls coefficients non nuls sont les $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et leurs conjugués :

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\lambda^*}\,\partial_\gamma\, g_{\beta\lambda^*}$$

Rappelons les formules de géométrie riemannienne :

$$R^A_{B,\,LM} = \partial_L \Gamma^A_{BM} - \partial_M \Gamma^A_{BL} + \Gamma^A_{RL}\,\Gamma^R_{BM} - \Gamma^A_{RM}\,\Gamma^R_{BL} \qquad \Gamma^A_{BA} = \partial_B \log \sqrt{|g|}$$

où $g = \det(g_{LM})$. Ici on obtient

$$R^\alpha_{\beta,\,\lambda\mu^*} = -\,\partial_{\mu^*}\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} \qquad R_{\beta\mu^*} = -\,\partial_{\mu^*}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} = -\,\partial_{\mu^*}\Gamma^A_{\beta A}$$

d'où

$$\psi = \frac{-i}{2\pi}\;\partial^2_{\beta\mu^*}\;\log\sqrt{|g|}\,dz^\beta \wedge dz^{\mu^*}$$

§ 22. - Variété presque-cosymplectique dont les formes fondamentales ω et F ont leurs dérivées covariantes nulles pour une connexion riemannienne donnée.

Dans ce cas ω et F sont fermées, il s'agit donc nécessairement d'une variété cosymplectique.

Les différentielles absolues $\nabla\omega$ et ∇F étant nulles, on a pour tout champ X

$$\nabla i(X)\omega = i(\nabla X)\omega \qquad \nabla i(X)F = i(\nabla X)F$$

Il en résulte que le champ d'hyperplans horizontaux Π_x et le champ de droites verticales D_x, définis respectivement par $i(X)\omega = 0$ et $i(X)F = 0$ avec $X \in T_x$, sont invariants par tout transport selon la connexion. En particulier le groupe d'holonomie homogène Ψ_x en $x \in V_m$ laisse invariants D_x et Π_x. Comme le champ D est orientable (lemme 3 § 1), Ψ_x est un groupe de rotations autour de D_x. Si Ψ_x ne se réduit pas à l'identité il en résulte que D_x et Π_x sont perpendiculaires pour la métrique donnée (h_{AB}).

De la métrique (h_{AB}) on peut, comme au § 2, déduire une autre métrique (g_{AB}) induisant dans chaque hyperplan horizontal une métrique échangeable avec la 2-forme induite par F. Pour cela, selon la méthode exposée dans [1] § 96, on prend d'abord dans Π_x la forme quadratique auxiliaire $k_{ij} = h^{kl}F_{ik}F_{jl}$ qui est définie positive. Soient ϱ_a^2 $(a = 1, 2, ..., q)$ les différentes valeurs propres de (k_{ij}) par rapport à (h_{ij}). Si nous prolongeons ce tenseur (k_{ij}) à T_x en posant $k_{AB} = h^{LM}F_{AL}F_{BM}$ ce qui donne $k_{0B} = k_{A0} = 0$, ce tenseur symétrique (k_{AB}) est invariant par transport puisqu'il est produit contracté de trois tenseurs à dérivées covariantes nulles. Ses valeurs propres par rapport à (h_{AB}), qui sont 0 et ϱ_a^2 sont donc constantes et les sous-espaces propres respectifs D_x et S^a sont invariants par transport et orthogonaux deux à deux.

La variété est donc réductible pour la métrique (h_{AB}) et par conséquent localement décomposable. Il y a donc au voisinage de chaque point un système de coordonnées locales (x^A) adaptées à la réductibilité envisagée et la métrique se décompose de la sorte

$$ds^2 = h_{00}(x^0)\,(dx^0)^2 + \sum_{a=1}^{a=q} h_{i_a j_a}(x^{k_a})\,dx^{i_a}\,dx^{j_a}$$

En effectuant le cas échéant une quadrature, on peut choisir x^0 telle que $\omega = dx^0$. Prenons pour métrique (g_{AB}) celle qui est définie par

$$ds'^2 = h_{00}(x^0)\,(dx^0)^2 + \sum_a \varrho_a\, h_{i_a j_a}(x^{k_a})\, dx^{i_a}\, dx^{j_a}$$

D'après l'expression des coefficients de connexion

$$\Gamma^A_{BC} = h^{AD}[BC, D] = \frac{1}{2}\; h^{AD}(\partial_B h_{CD} + \partial_C h_{BD} - \partial_D h_{BC})$$

on voit que les Γ^A_{BC} sont tous nuls sauf ceux dont les indices correspondent tous trois à un même sous-espace D_x ou S^a. Puis remarquant que

$$g^{i_a l_a} = \frac{1}{\varrho_a}\; h^{i_a l_a} \qquad\qquad g^{00} = h^{00}$$

on constate que les deux métriques (h_{AB}) et (g_{AB}) définissent la même connexion riemannienne. De plus d'après la relation $\nabla_0 \omega_0 = -\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{2}\; h^{00}\,\partial_0 h_{00}$, on voit que h_{00} est une constante.

Les formes ω et F ont donc aussi leurs dérivées covariantes nulles pour la métrique (g_{AB}), avec laquelle elles définissent, après division par h_{00}, une structure presque-cohermitienne (qui en l'occurrence se trouve être presque-cokählerienne). De la réciproque 1 § 21, il résulte que cette structure est cokählerienne.

Corollaire. - Si une variété V_{2n+1} est orientable et si elle admet une 2-forme F de rang $2n$ qui a sa dérivée covariante nulle pour une connexion riemannienne donnée, V_{2n+1} admet une structure cokählerienne.

Preuve. La droite D_x définie par $i(X)F = 0$ est invariante par Ψ_x. Les hyperplans Π_x orthogonaux aux droites D_x sont aussi invariants par Ψ_x. D'après la remarque 2 § 10, le champ D est orientable. Soit E_x le vecteur de D_x normé et orienté positivement. E_x est invariant par Ψ_x; le champ E a donc sa dérivée covariante nulle. Si h est le tenseur métrique, la 1-forme $\omega = i(E)h$ a aussi sa dérivée covariante nulle. Nous sommes alors ramenés au cas précédent.

VI. - Propriétés relatives aux groupes d'holonomie

§ 23. - Une caractérisation des variétés admettant une structure presque-cocomplexe.

a) Soit V_{2n+1} une variété presque-cocomplexe munie d'une connexion presque-cocomplexe. Le groupe d'holonomie homogène de cette connexion est, pour les repères de $E^a(V_{2n+1})$, sous-groupe du groupe structural G_a. Ce groupe G_a, qui constitue une représentation réelle de $R^+ \times GL(n, \boldsymbol{C})$, est formé par les matrices régulières du type

$$(23.1) \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & C \\ 0 & -C & B \end{pmatrix} \quad a > 0 \qquad B, C \in L(n, R)$$

Inversement soit une variété différentiable V_{2n+1} munie d'une connexion linéaire réelle et supposons qu'en un point x de V_{2n+1} il existe un repère $R^x = (e_\lambda^x)$ pour lequel le groupe d'holonomie Ψ_{R^x} soit sous-groupe de la représentation réelle G_a de $R^+ \times GL(n, \boldsymbol{C})$. C'est-à-dire que les matrices éléments de Ψ_{R^x} sont du type (23.1).

Ψ_{R^x} laisse donc invariants la demi-droite support de e_0^x, l'hyperplan engendré par les $2n$ vecteurs e_i^x et le tenseur $(\mathfrak{I}_\lambda^B)$ en x, ayant pour composantes relativement à R^x les éléments de la matrice

$$(23.2) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

où E_n représente la matrice unité d'ordre n.

En effet cette matrice (23.2) est permutable avec toutes les matrices du type (23.1).

On en déduit par transport un champ de droites orientées D, un champ transversal d'hyperplans H et un tenseur $(\mathfrak{I}_A^B)$ sur V_{2n+1} à dérivée covariante nulle. Pour un repère déduit lui aussi de R^x par transport, ce tenseur $(\mathfrak{I}_\lambda^B)$ a encore les composantes (23.2).

L'opérateur linéaire défini sur l'espace tangent T_y par $(\mathfrak{F}_A^B)$ annule donc les vecteurs de D_y, applique T_y sur Π_y et induit sur Π_y un opérateur de carré -1. De plus le champ D étant orientable et transversal au champ Π, il existe une 1-forme globale ω partout non-nulle induisant sur chaque Π_y la forme nulle (lemme 3 § 1). Ainsi la variété V_{2n+1} admet une structure presque-cocomplexe et la connexion envisagée s'identifie à une connexion presque-cocomplexe pour cette structure.

b) En particulier si une variété différentiable V_{2n+1} est munie d'une connexion euclidienne relativement à une métrique riemannienne donnée et si en un point x de V_{2n+1} il existe un repère orthonormé R^x pour lequel le groupe d'holonomie homogène de la connexion soit sous-groupe du groupe isomorphe à $U(n)$ formé par les matrices du type

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & C \\ 0 & -C & B \end{pmatrix} \qquad B+iC \in U(n)$$

alors la variété admet pour la métrique donnée une structure presque-cohermitienne et la connexion donnée s'identifie à une connexion presque-cohermitienne pour cette structure.

c) Enfin si la connexion envisagée sur la variété riemannienne est la connexion riemannienne, la variété admet, sous la même hypothèse, une structure cokählerienne pour la métrique donnée. En effet dans ce cas c'est la connexion riemannienne qui s'identifie à une connexion presque-cohermitienne. D'après la réciproque 2 § 21, cette condition suffit pour que la structure ainsi construite soit cokählerienne.

§ 24. - Relation entre la forme de Chern γ d'une connexion presque-cohermitienne et le groupe d'holonomie restreint σ.

a) Par l'utilisation éventuelle d'un revêtement universel, il suffit de raisonner sur une variété V_{2n+1} simplement connexe munie d'une structure presque-cohermitienne.

Pour les bases de $\overset{c}{\varepsilon}(V_{2n+1})$, σ est sous-groupe du groupe structural $I \times U(n)$. Supposons que σ soit sous-groupe de $I \times SU(n)$, c'est-à-dire qu'il laisse invariante au point x une n-forme en θ^λ. On en déduit par transport une n-forme ζ sur V_{2n+1} à dérivée covariante nulle, représentable localement par

$$\zeta = \exp(i\varphi)\,\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$$

La différentielle absolue de ζ admet pour composante stricte

$$\nabla\zeta_{1\ldots n} = (id\varphi - \pi^\alpha_\alpha)\,\zeta_{1\ldots n} \tag{24.1}$$

On en déduit $\pi^\alpha_\alpha = id\varphi$; ainsi d'après § 14 la forme de Chern ψ est nulle. On remarque aussi que $d\varphi$ est réelle; on peut donc choisir φ réelle.

Inversement supposons nulle la forme ψ de la connexion et recouvrons la variété par des voisinages munis de repères appartenant à $\overset{b}{\varepsilon}(V_{2n+1})$. Sur chacun de ces voisinages la forme réelle correspondante $-i\pi^\alpha_\alpha$ est fermée. Par suite, à tout point x de V_{2n+1} on peut associer un voisinage $V(x)$ tel que $-i\pi^\alpha_\alpha = d\varphi_V$ et la forme locale $\exp(i\varphi_V)\,\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$ a sa dérivée covariante nulle dans la connexion, d'après (24.1). Ainsi les éléments de $\sigma^c_{R^x}$ induits par des lacets contenus dans $V(x)$ laissent invariante cette forme: comme ils appartiennent déjà à $I \times U(n)$, ils appartiennent donc à $I \times SU(n)$. Comme $SU(n)$ est sous-groupe invariant dans $U(n)$, les éléments induits par des lassos appartiennent aussi à $I \times SU(n)$; et σ, dont chaque élément est induit par un produit fini de lassos (cf. [1] § 26), est donc sous-groupe de $I \times SU(n)$. Nous énoncerons:

Théorème. - *Pour que le groupe d'holonomie restreint d'une variété à connexion presque-cohermitienne soit sous-groupe de* $I \times SU(n)$, *il faut et suffit que la forme de* Chern ψ *de la connexion soit partout nulle.*

Corollaire. - *Dans le cas de la connexion riemannienne d'une variété cokählerienne, il faut et suffit que la courbure de* Ricci *soit nulle partout.*

b) Centre du groupe d'holonomie. A toute matrice élément de $\sigma \subset 1 \times U(n)$ faisons correspondre la valeur $d = \exp(i\alpha)$ de son

déterminant; a est un scalaire réel. On définit ainsi un homomorphisme φ ayant pour noyau $\sigma \cap 1 \times SU(n)$, du groupe connexe σ sur un groupe $\varphi(\sigma)$ qui est donc connexe et est soit à un paramètre, soit réduit à l'unité. Ce second cas équivaut à $\sigma \subset 1 \times SU(n)$. Le groupe σ étant compact, son algèbre de Lie σ est réductive: au noyau $N = \sigma \cap 1 \times SU(n)$ correspond un idéal $\overline{N}$ qui admet donc un idéal supplémentaire I, lequel est isomorphe à $\varphi(\sigma)$: I est donc de dimension 0 ou 1. Si le centre de σ est discret, celui de σ est nul; σ est alors semi-simple et son idéal I qui est abélien est donc nul. Alors $\varphi(\sigma)$ se réduit à l'identité, d'où $\sigma \subset 1 \times SU(n)$ et $\psi = 0$. Nous énoncerons ce résultat pour un cas particulier:

Théorème. - *Si la courbure de Ricci d'une variété cokählerienne n'est pas nulle, le centre du groupe d'holonomie restreint n'est pas discret.*

§ 25. - Réductibilité d'une variété cokählerienne.

a) Soit une variété cokählerienne simplement connexe V_{2n+1} et soit σ_x son groupe d'holonomie homogène en $x \in V_{2n+1}$ pour la connexion riemannienne, considéré comme groupe de rotations. Il laisse invariant l'opérateur ϑ en x et, pour un repère réel adapté à la structure presque-cohermitienne, est sous-groupe de la représentation réelle de $1 \times SU(n)$.

D'après le cas analogue relatif aux variétés kählériennes (cf. [1] § 119), on peut décomposer l'hyperplan H_x en une somme directe de sous-espaces orthogonaux P_x^a $(a = 0, 1, ..., k)$, de dimensions respectives $2q_a$, invariants par ϑ et par σ_x, tels que σ_x induise sur P_x^0 la représentation identité et sur chaque P_x^a $(a \neq 0)$ une représentation irréductible qui, pour un choix convenable du repère, soit sous-groupe de la représentation réelle de $U(q_a)$.

Les feuilles d'indice $a \neq 0$ correspondant à cette décomposition admettent, pour la structure riemannienne induite, un groupe d'holonomie qui est sous-groupe de la représentation réelle de $U(q_a)$ et, d'après une caractérisation des variétés kählériennes analogue à celle du § 23, ces feuilles sont kählériennes. Sur les feuilles correspondant à P_x^0 se trouvent définies des structures kählériennes de courbure nulle, c'est-à-dire des structures localement unitaires. Nous obtenons:

THÉORÈME. - *La réductibilité d'une variété cokählerienne simplement connexe n'introduit, en dehors de la famille des lignes verticales, que des variétés kählériennes irréductibles et des variétés localement unitaires.*

b) Soit une variété cokählerienne V_{2n+1} telle que le groupe induit sur Π_x par σ_x soit irréductible (dans le réel) et telle que sa courbure de RICCI ne soit pas partout nulle. D'après § 24, σ_x admet un centre non discret.

Désignons par $C(\sigma_x)$ la composante connexe contenant e (élément unité) du centralisateur de σ_x dans le groupe $R(D_x)$ des rotations de T_x autour de la verticale D_x. $C(\sigma_x)$ est un sous-groupe de LIE du groupe de LIE $R(D_x)$. Soient $\underline{C(\sigma_x)}$ et $\underline{R(D_x)}$ leurs algèbres de LIE.

L'algèbre de LIE du groupe des rotations de T_x est constituée par les endomorphismes de T_x qui s'identifient par abaissement d'un indice aux 2-formes réelles en x. Les éléments de $\underline{R(D_x)}$ appliquent D_x sur $\{0\}$ et T_x sur Π_x : ils s'identifient donc aux 2-formes réelles horizontales. Si $\mu \in \underline{R(D_x)}$, la condition $\mu \in \underline{C(\sigma_x)}$ exprime que

$$ad(s)\,\mu = \mu \qquad \text{pour tout } s \in \sigma_x$$

Traduisons cette condition pour la 2-forme identifiée à μ :

$$s^a{}_b\,\mu^b{}_c\,(s^{-1})^c{}_d = \mu^a{}_d \qquad s_a{}^b\,\mu_{bc}\,(s^{-1})^c{}_d = \mu_{ad}$$

Or on prouve facilement que dans tout espace vectoriel euclidien les 2-tenseurs euclidiens qui s'identifient à deux rotations inverses l'une de l'autre sont symétriques l'un de l'autre, c'est-à-dire $s_a{}^b = (s^{-1})^b{}_a$, d'où

$$\mu_{bc}\,(s^{-1})^b{}_a\,(s^{-1})^c{}_d = \mu_{ad} \quad \text{pour tout} \quad s \in \sigma_x$$

$\underline{C(\sigma_x)}$ s'identifie donc à l'espace des 2-formes réelles horizontales invariantes par σ_x.

Chaque $2n$-feuille horizontale étant une variété kählerienne qui vérifie les deux hypothèses correspondantes, on sait alors que les formes μ cherchées sont les formes $\mu = kF$ où k est une constante réelle (cf. [1] § 119). $C(\sigma_x)$ est ainsi un groupe à un paramètre. Le centre de σ_x étant non-discret, sa composante connexe contenant

e coïncide avec $C(\sigma_x)$. Remarquons que la relation $\mu = kF$ pour la 2-forme μ se traduit par $\mu = k\mathfrak{I}$ pour l'opérateur identifié à μ.

THÉORÈME. - *Pour une variété cokählerienne telle que le groupe induit par σ_x sur l'hyperplan horizontal H_x soit irréductible et telle que sa courbure de* RICCI *ne soit pas partout nulle, le centralisateur connexe $C(\sigma_x)$ de σ_x dans le groupe des rotations autour de la verticale D_x coïncide avec la composante connexe contenant* e *du centre de σ_x. Leur algèbre de* LIE *est engendrée par l'opérateur $\mathfrak{I}$ de la structure presque-cocomplexe.*

VII. - FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR CES VARIÉTÉS.

§ 26. - ORTHOGONALITÉ DES FORMES COMPLEXES SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE-COHERMITIENNE.

Nous désignerons par $\bar{\alpha}$ la forme complexe conjuguée d'une forme complexe α; en repères complexes adaptés à la structure presque-cocomplexe on aura

$$(\bar{\alpha})_{A_1 \dots A_r} = \overline{\alpha_{A_1^* \dots A_r^*}}$$

On définira le produit scalaire local (α, β) de deux r-formes par:

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{r!} \alpha_{A_1 \dots A_r} \bar{\beta}^{A_1 \dots A_r}$$

Ce produit scalaire vérifie

$$(\beta, \alpha) = \overline{(\alpha, \beta)} \qquad (\alpha, \beta)\eta = \alpha \wedge *\bar{\beta}$$

où η est la forme élément de volume et * l'opérateur d'adjonction. On voit que (α, α) est un scalaire réel positif ou nul qui ne s'annule en un point x que si α est nulle en x.

Si la variété est compacte, on définira un produit scalaire global:

$$< \alpha, \beta > = \int_{V_{2n+1}} (\alpha, \beta)\eta = \int_{V_{2n+1}} \alpha \wedge *\bar{\beta}$$

Deux r-formes α, β de V_{2n+1} sont globalement orthogonales si $<\alpha, \beta>=0$.

On peut écrire

$$(\alpha, \beta)=\frac{1}{r!}\, g^{A_1 B_1^*} \dots g^{A_r B_r^*}\, \alpha_{A_1 \dots A_r}\, \overline{\beta_{B_1 \dots B_r}}$$

On en déduit que si α et β sont des formes pures de types différents, elles sont localement et globalement orthogonales.

§ 27. - Opérateurs d_0, d' et d'' sur une variété cocomplexe.

La torsion de la structure étant nulle on a

$$d\theta^0=(d\theta^0)_{0A}\,\theta^0\wedge\theta^A \qquad d\theta^\lambda=b^\lambda_{\mu A}\theta^\mu\wedge\theta^A$$

Soient $a_{(1,0,0)}$ et $a_{(0,1,0)}$ des 1-formes pures de types respectifs $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$:

$$a_{(1,0,0)}=a_0\theta^0 \qquad da_{(1,0,0)}=-\theta^0\wedge[da_0-a_0(d\theta^0)_{0A}\,\theta^A]$$
$$a_{(0,1,0)}=a_\lambda\theta^\lambda \qquad da_{(0,1,0)}=-\theta^\mu\wedge[da_\mu-a_\lambda b^\lambda_{\mu A}\,\theta^A]$$

Ainsi pour $\varepsilon+p+q=1$, la différentielle d'une 1-forme pure de type (ε, p, q) est somme de trois 2-formes pures de types respectifs $(\varepsilon+1, p, q)$, $(\varepsilon, p+1, q)$ et $(\varepsilon, p, q+1)$. D'après la différentiation d'un produit extérieur on démontre par récurrence que ce résultat s'étend à toutes les r-formes pures.

Ainsi l'opérateur d est somme de trois opérateurs purs de types respectifs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ que nous représenterons respectivement par d_0, d' et d''. On vérifie immédiatement que la formule de différentiation d'un produit extérieur reste encore valable si l'on substitue à l'opérateur d l'un des opérateurs d_0, d' ou d''. On a

$$d^2=d_0^2+d'^2+d''^2+(d'd''+d''d')+(d''d_0+d_0d'')+(d_0d'+d'd_0)$$

Les six opérateurs du second membre sont purs et de types tous différents. Leur somme étant nulle, chacun est donc nul:

$$d_0^2=d'^2=d''^2=d'd''+d''d'=d''d_0+d_0d''=d_0d'+d'd_0=0$$

§ 28. - Opérateurs δ_0, δ' et δ'' sur une variété cohermitienne.

Grâce à l'opérateur d'adjonction * défini par la métrique, on introduit sur les r-formes les opérateurs

$$\delta_0 = (-1)^r * ^{-1} d_0 * \quad \delta' = (-1)^r * ^{-1} d' * \quad \delta'' = (-1)^r * ^{-1} d'' *$$

qui sont purs et typés, de types respectifs $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ et $(0, 0, -1)$. On voit immédiatement que

$$\delta = \delta_0 + \delta' + \delta''$$

$$(28.1) \qquad \delta_0^2 = \delta'^2 = \delta''^2 = \delta'\delta'' + \delta''\delta' = \delta''\delta_0 + \delta_0\delta'' = \delta_0\delta' + \delta'\delta_0 = 0$$

Si la variété est compacte, on sait que $< d\alpha, \beta > = < \alpha, \delta\beta >$. Soit α une forme pure de type (ε, p, q) ; si β est pure elle est orthogonale à $d'\alpha$ sauf si son type est $(\varepsilon, p+1, q)$. Dans ce cas β est alors orthogonale à $d_0\alpha$ et $d''\alpha$, d'où

$$< d'\alpha, \beta > = < d\alpha, \beta > = < \alpha, \delta\beta > = < \alpha, \delta'\beta >$$

Par addition de formes pures on obtient ainsi pour des formes quelconques

$$< d'\alpha, \beta > = < \alpha, \delta'\beta >$$

Ainsi δ', δ'' et δ_0 sont les opérateurs transposés respectifs de d', d'' et d_0.

§ 29. - Opérateur M sur une variété presque-cocomplexe.

a) Etant donnée une r-forme α, nous désignerons par $M\alpha$ la r-forme définie de la manière suivante : si $v_1, \ldots, v_r$ sont r vecteurs arbitraires de T_x^C

$$M\alpha(v_1, \ldots v_r) = \sum_{s=1}^{s=r} \alpha(v_1, \ldots, \mathfrak{J}v_s, \ldots, v_r)$$

Ma a pour composantes

$$(29.2)\qquad (Ma)_{A_1 \dots A_r} = \sum_{s=1}^{s=r} a_{A_1 \dots A_{s-1} B A_{s+1} \dots A_r} \mathfrak{I}^B_{A_s} =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\ \varepsilon^{D_1 \dots D_r}_{A_1 \dots A_r}\ \mathfrak{I}^B_{D_1}\ a_{BD_2 \dots D_r}$$

Si $a_{(\varepsilon, p, q)}$ est une r-forme pure de type (ε, p, q), on obtient en calculant les composantes dans un repère complexe adapté à la structure :

$$(29.3)\qquad Ma_{(\varepsilon, p, q)} = (p - q)\, i a_{(\varepsilon, p, q)}$$

b) Dans le cas d'une variété cocomplexe, étudions la commutation de M avec d', d'' et d_0. Utilisant (29.3) on montre facilement

$$d'M - Md' = -id' \qquad d''M - Md'' = id'' \qquad d_0 M - Md_0 = 0$$

$$dM - Md = -id' + id''$$

c) Dans le cas d'une variété cohermitienne on montre de même

$$\delta' M - M\delta' = i\delta' \qquad \delta'' M - M\delta'' = -i\delta'' \qquad \delta_0 M - M\delta_0 = 0$$

$$\delta M - M\delta = i\delta' - i\delta''$$

d) Sur toute variété presque-cohermitienne, le tenseur $(\mathfrak{I}^B_A)$ qui représente l'opérateur $\mathfrak{I}$ est identifié par la métrique à la 2-forme fondamentale (F_{AD}); alors, d'après la deuxième expression (29.2), M s'identifie à l'opérateur $-K_1(F)$ défini par LICHNEROWICZ dans [1] § 86.

§ 30. - OPÉRATEURS SUR UNE VARIÉTÉ COKÄHLERIENNE.

a) La forme F est alors à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne. Les résultats établis par LICHNEROWICZ au sujet des opérateurs $K_h(F)$ dans [1] § 88-89 sont alors valables. Posons $L = e(F) = K_0(F)$ $\Lambda = i(F) = K_2(F)$.

Les relations (88-6) [1] peuvent s'écrire pour $h = 0$ et $h = 1$:

$$(30.1) \qquad \begin{cases} \delta L - L\delta = -dM + Md \\ -\delta M + M\delta = -d\Lambda + \Lambda d \end{cases}$$

Par décomposition selon les types, on en déduit en utilisant les résultats du § 29 et en remarquant que L est pur de type $(0, 1, 1)$ et Λ pur de type $(0, -1, -1)$:

$$(30.2) \qquad \delta' L - L\delta' = -id'' \qquad \delta'' L - L\delta'' = id' \qquad \delta_0 L - L\delta_0 = 0$$

$$(30.3) \qquad d'\Lambda - \Lambda d' = -i\delta'' \qquad d''\Lambda - \Lambda d'' = i\delta' \qquad d_0\Lambda - \Lambda d_0 = 0$$

F étant fermée, les formules (88.7) et (88.8) [1] sont valables et s'écrivent

$$dL = Ld \qquad \delta\Lambda = \Lambda\delta$$

Il en résulte les mêmes relations pour chacune des trois composantes pures de d et δ respectivement.

De (30.2) on déduit par multiplication à gauche puis à droite par δ_0

$$\delta_0\delta' L - L\delta_0\delta' = -i\delta_0 d'' \qquad \delta'\delta_0 L - L\delta'\delta_0 = -id''\delta_0$$

Tenant compte de (28.1) on obtient par addition $\delta_0 d'' + d''\delta_0 = 0$. Par des opérations analogues sur (30.2) ou (30.3) on obtient

$$\delta_0 d' + d'\delta_0 = \delta_0 d'' + d''\delta_0 = d_0\delta' + \delta' d_0 = d_0\delta'' + \delta'' d_0 = d'\delta'' + \delta'' d' = \\ = d''\delta' + \delta' d'' = 0$$

$$d'\delta' + \delta' d' = d''\delta'' + \delta'' d''$$

On en déduit pour l'opérateur laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$:

$$\Delta = d_0\delta_0 + \delta_0 d_0 + d'\delta' + \delta' d' + d''\delta'' + \delta'' d''$$

Il en résulte que Δ est pur et typé, de type $(0, 0, 0)$. Autrement dit Δ commute avec les projecteurs selon les types.

Tenant compte des résultats de [1] § 89, on peut énoncer :

THÉORÈME. - *Sur une variété cokählerienne l'opérateur Δ est pur, de type $(0,0,0)$; il s'exprime à l'aide des six composantes pures de d et δ par les relations*

$$\Delta = d_0\delta_0 + \delta_0 d_0 + 2(d'\delta' + \delta' d') = d_0\delta_0 + \delta_0 d_0 + 2(d''\delta'' + \delta'' d'')$$

Il commute avec ces six opérateurs ainsi qu'avec L, M et Λ.

COROLLAIRE 1. - *Pour qu'une forme soit harmonique, il faut et suffit que chacune de ses composantes pures soit harmonique.*

COROLLAIRE 2. - *Si une forme α satisfait à $d_0\alpha = \delta_0\alpha = d''\alpha = \delta''\alpha = 0$, elle est harmonique.*

b) Si la variété est compacte, on déduit de ce théorème en utilisant le § 28:

$$<\Delta\alpha, \alpha> = <d_0\alpha, d_0\alpha> + <\delta_0\alpha, \delta_0\alpha> + 2<d''\alpha, d''\alpha> + 2<\delta''\alpha, \delta''\alpha>$$

Dans ce cas donc, pour que α soit harmonique, il faut et suffit que

$$d_0\alpha = \delta_0\alpha = d''\alpha = \delta''\alpha = 0$$

De plus dans ce cas compact, on sait (cf. [10] § 31 théorème 23) qu'on peut définir deux opérateurs H et G uniques tels que pour toute forme α

$$\alpha = H\alpha + \Delta G\alpha \qquad \Delta H\alpha = 0 \qquad HG\alpha = 0$$

On vient de voir que Δ permute avec les projecteurs selon les types. Il en résulte (cf. [11] chap. IV, n° 1, lemme 3) que H et G permutent aussi avec ces projecteurs. On en déduit en particulier que la composante harmonique d'une forme pure est pure et du même type.

§ 31. - NOMBRES DE BETTI D'UNE VARIÉTÉ COKÄHLERIENNE COMPACTE $V_m (m = 2n+1)$.

D'après le lemme 3 § 1 il existe sur toute variété presque-cocomplexe un champ de vecteurs dépourvu de zéro. Dans le cas compact, la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de la variété est donc nulle,

$1-b_1+\ldots+(-1)^p b_p+\ldots-b_m=0$. Le polynôme de Poincaré de V_m, soit $P(t)=\sum_{p=0}^{p=m} b_p t^p$, est donc divisible par $t+1$.

Dans le cas présent, comme il s'agit d'une variété cosymplectique compacte, les nombres de Betti sont tous différents de zéro (pour $0 \leqslant p \leqslant m$). V_m étant compacte, $b_p(V_m)$ est égal à la dimension de l'espace $H_p(V_m)$ des p-formes harmoniques réelles et $b_p=b_{m-p}$.

Si ω est la 1-forme fondamentale de V_m, on a vu au § 13 que toute forme α peut d'une façon unique se mettre sous la forme $\alpha=\omega\wedge\beta+\gamma$ où β et γ sont horizontales

$$\beta=i(\omega)\,\alpha \qquad \gamma=i(\omega)\,e(\omega)\,\alpha$$

La dérivée covariante de ω étant nulle (d'après § 21), les opérateurs $i(\omega)$ et $e(\omega)$ commutent avec le laplacien $\Delta=d\delta+\delta d$. Il en résulte que β et γ sont harmoniques si α l'est, et réciproquement. En appelant a_p la dimension de l'espace HH_p des p-formes harmoniques horizontales réelles, on a donc $H_p \simeq HH_{p-1}\oplus HH_p$, d'où

$$b_p=a_{p-1}+a_p \qquad (a_m=0)$$

On en déduit pour le polynôme de Poincaré de V_m la décomposition

$$P(t)=(1+t)\,(1+a_1t+\ldots+a_pt^p+\ldots+t^{2n})$$

On retrouve ainsi la divisibilité par $t+1$. De la relation $b_p=b_{2n+1-p}$ résulte par récurrence sur p :

$$a_p=a_{2n-p}$$

Du fait que Δ est un opérateur réel, c'est-à-dire que $\Delta\overline{\alpha}=\overline{\Delta\alpha}$, il résulte que la forme complexe conjuguée d'une forme harmonique est harmonique. On en déduit en particulier que la partie réelle et la partie imaginaire pure d'une forme complexe horizontale harmonique sont elles aussi horizontales et harmoniques. Le nombre a_p est donc aussi égal à la dimension complexe de l'espace des p-formes complexes horizontales harmoniques. Or d'après le corollaire 1 § 30,

cet espace est somme directe des espaces des formes harmoniques pures des différents types $(0, r, s)$ avec $r+s=p$. Soient $b_{(0,\,r,\,s)}$ leurs dimensions complexes respectives; on a donc

$$a_p = \sum_{r+s=p} b_{(0,\,r,\,s)}$$

Or on a évidemment $b_{(0,\,r,\,s)} = b_{(0,\,s,\,r)}$. On en déduit

Théorème. - *Soit a_p la dimension de l'espace des p-formes harmoniques réelles horizontales d'une variété cokählerienne compacte V_{2n+1}: si p est impair, a_p est pair. Les nombres de* Betti *vérifient $b_p = a_{p-1} + a_p$. En particulier b_1 et b_{2n} sont impairs.*

D'après la fin du § 13, si γ_r est une r-forme harmonique horizontale réelle non nulle, avec $r \leq n-1$, la $(r+2)$-forme harmonique horizontale réelle $F \wedge \gamma_r$ est aussi non nulle. On en déduit

Théorème. - *On a*

$$a_r \leq a_{r+2} \qquad \text{pour} \quad r \leq n-1$$

D'où pour les nombres de Betti

$$b_r \leq b_{r+2} \qquad \text{pour} \quad r \leq n-1$$

F ayant sa dérivée covariante nulle, l'opérateur $e(F)$ commute avec le laplacien Δ. Il en résulte que les $2q$-formes horizontales F^q sont harmoniques, et non nulles pour $q \leq n$. On en déduit $a_{2q} \geq 1$.

Ainsi les nombres a_p possèdent les mêmes propriétés que celles qui sont connues pour les nombres de Betti des variétés kählériennes compactes.

Remarque. - Une variété cokählerienne ne peut pas être à la fois compacte et simplement connexe. En effet, d'après un théorème de Georges de Rham, le variété se décomposerait en produit riemannien d'une variété horizontale par une ligne verticale. Cette dernière devrait aussi être compacte et simplement connexe, ce qui est impossible.

VIII. - Transformations infinitésimales.

§ 32. - Transformations presque-cocomplexes d'une variété presque-cocomplexe.

On appellera ainsi les automorphismes de la structure presque-cocomplexe de la variété, c'est-à-dire les transformations bidifférentiables μ dont l'application linéaire tangente μ_x' en chaque point x vérifie $\mu_x'(\mathfrak{J}_x Y) = \mathfrak{J}_{\mu x}(\mu_x' Y)$ pour tout vecteur $Y \in T_x$, autrement dit

$$\mu' o \mathfrak{J} = \mathfrak{J} o \mu'$$

Dans le cas d'une variété cocomplexe, on les appellera transformations cocomplexes.

Une transformation infinitésimale presque-cocomplexe (resp. cocomplexe), en abrégé t.i.p.cc. (resp. t.i.cc.), sera définie par un champ de vecteurs X vérifiant $\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J} = 0$, où $\mathfrak{L}(X)$ représente la dérivation de Lie par rapport au champ X. D'après la dérivation d'un produit contracté, cette condition équivaut à $\mathfrak{L}(X)(\mathfrak{J}Y) = \mathfrak{J}[\mathfrak{L}(X)Y]$ pour tout champ Y, c'est-à-dire à

$$[X, \mathfrak{J}Y] = \mathfrak{J}[X, Y] \qquad \forall Y \in T(V_{2n+1})$$

De même que les automorphismes infinitésimaux (en abrégé a.i.) de n'importe quelle structure, les t.i.p.cc. forment une algèbre de Lie L_{cc} relativement au crochet des champs de vecteurs.

Si X définit une t.i.p.cc., $\mathfrak{L}(X)$ permute avec les projecteurs selon les types d'indices. C'est-à-dire que si un champ de tenseurs est pur relativement à ces types, son transformé de Lie par X est pur et du même type. En effet, d'après la dérivation des produits tensoriels et produits contractés, il suffit de le prouver pour les champs de vecteurs contravariants. Si Y est un champ de vecteurs pur, de l'un des trois types possibles o, a ou a^*, Y est en chaque point vecteur propre de $\mathfrak{J}$, soit $\mathfrak{J}Y = kY$ avec $k = 0, +i$, ou $-i$

$$\mathfrak{J}\mathfrak{L}(X)Y = \mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}Y = \mathfrak{L}(X)\,kY = k\mathfrak{L}(X)Y$$

donc $\mathfrak{L}(X)Y$ est aussi en tout point vecteur propre de $\mathfrak{J}$ pour la même valeur caractéristique k.

Il en résulte en particulier que les t.i.p.cc. horizontales d'une part et verticales d'autre part forment deux idéaux, L_H et L_V, de L_{cc}. Le crochet de ces idéaux est nul.

§ 33. - Transformations infinitésimales cocomplexes d'une variété cocomplexe.

Soit alors (x^0, z^α) un système de coordonnées locales cocomplexes (cf. § 5). Posons $z^{\alpha^*} = \overline{z^\alpha}$. Le corepère complexe $(dx^0, dz^\alpha, dz^{\alpha^*})$ est adapté à la structure, on a donc

$$\mathfrak{J}^0_B = \mathfrak{J}^A_0 = \mathfrak{J}^\alpha_{\beta^*} = \mathfrak{J}^{\alpha^*}_\beta = 0 \qquad \mathfrak{J}^\alpha_\beta = i\delta^\alpha_\beta = -\mathfrak{J}^{\alpha^*}_{\beta^*}$$

Comme il s'agit de repères naturels de coordonnées locales, on a

$$[\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^A_B = X^D\partial_D\mathfrak{J}^A_B + \mathfrak{J}^A_D\partial_B X^D - \mathfrak{J}^D_B\partial_D X^A$$

En l'occurrence on obtient pour tout champ de vecteurs X

$$[\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^0_0 = [\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^\alpha_\beta = [\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^{\alpha^*}_{\beta^*} = 0 \tag{33.1}$$

$$[\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^\alpha_0 = i\partial_0 X^\alpha \quad [\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^0_\beta = -i\partial_\beta X^0 \quad [\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^\alpha_{\beta^*} = 2i\partial_{\beta^*}X^\alpha \tag{33.2}$$

et f.c.c.

Pour qu'un champ réel X définisse une t.i.cc., il faut donc et il suffit que

$$\partial_0 X^\alpha = \partial_\beta X^0 = \partial_{\beta^*} X^\alpha = 0 \tag{33.3}$$

Ainsi X^0 n'est fonction que de x^0, les X^α ne dépendent que des z^β et en sont des fonctions holomorphes. S'il en est ainsi pour le champ X, il en est de même pour ses projections horizontale X_H et verticale X_V (définies par $X^0_H = 0$, $X^i_H = X^i$ et $X^0_V = X^0$, $X^i_V = 0$). Il en est de même aussi pour le champ horizontal $\mathfrak{J}X$. En outre le champ X_H définit sur chaque variété horizontale une transformation infinitésimale analytique de la structure complexe induite.

L'algèbre L_{cc} est somme directe de ses deux idéaux L_H et L_V.

§ 34. - Transformations infinitésimales cocomplexes d'une variété cokählerienne.

Dans ce cas nous choisirons la coordonnée réelle x^0 de façon que $\omega = dx^0$

$$ds^2 = (dx^0)^2 + 2g_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha\, dz^{\beta^*} \qquad F = ig_{\alpha\beta^*} dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}$$

$$\partial_0 g_{\alpha\beta^*} = 0 \qquad \partial_\lambda g_{\alpha\beta^*} = \partial_\alpha g_{\lambda\beta^*} \qquad \text{et f.c.c.}$$

Soit D l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne. Comme cette connexion est alors presque-cocomplexe, D permute avec les projecteurs selon les types d'indices (cf. § 8). On a vu au § 21 que parmi les coefficients de cette connexion seuls ne sont pas nuls les $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et leurs conjugués. On en déduit

$$(34.2) \qquad D_0 X^A = \partial_0 X^A \qquad D_B X^0 = \partial_B X^0 \qquad D_{\beta^*} X^\alpha = \partial_{\beta^*} X^\alpha$$

Les équations (33.3) sont alors équivalentes à

$$(34.3) \qquad D_0 X_\lambda = D_\beta X_0 = D_\lambda X_\mu = 0$$

Si la variété est compacte, on a vu, au § 18 corollaire, que toute isométrie infinitésimale est une t.i.cc. Pour que le champ X définisse une isométrie infinitésimale, il faut donc et il suffit que

$$(34.4) \qquad D_0 X_\lambda = D_\beta X_0 = D_\lambda X_\mu = 0 \qquad D_\alpha X_{\beta^*} + D_{\beta^*} X_\alpha = 0 \qquad D_0 X_0 = 0$$

En particulier il faut que la composante $X_0 = X^0 = i(X)\omega$ soit constante sur toute la variété. Ainsi la projection verticale du champ X est aussi une isométrie. Il en est de même aussi pour sa projection horizontale.

§ 35. - Identité relative aux transformations infinitésimales cocomplexes d'une variété cokählerienne.

A toute 1-forme réelle α, associons d'après (33.2) et (34.2)

les deux 2-tenseurs réels $a(\alpha)$ et $c(\alpha)$ définis par

$$(35.1)\quad \begin{cases} a(\alpha)_{\lambda\mu}=D_\lambda\alpha_\mu \quad a(\alpha)_{\lambda^*\mu^*}=D_{\lambda^*}\alpha_{\mu^*}\ a(\alpha)_{AB}=0 \text{ pour les autres types} \\ c(\alpha)_{0j}=\frac{1}{2}D_0\alpha_j \ \ c(\alpha)_{j0}=\frac{1}{2}D_j\alpha_0 \quad c(\alpha)_{00}=c(\alpha)_{ij}=0 \end{cases}$$

Ainsi pour que le champ de vecteurs X identifié à α par la métrique définisse une t.i.cc., il faut et suffit que

$$a(\alpha)=c(\alpha)=0$$

a) Sur toute variété riemannienne on a

$$(\Delta\alpha)_A=-D^BD_B\alpha_A+R_{AE}\alpha^E$$

Dans le cas d'une variété cokählerienne, les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont du type $(0,1,1)$, se sont

$$R_{\lambda\mu^*}=R_{\mu^*\lambda}\ .$$

$$\begin{cases} (\Delta\alpha)_0=-D^BD_B\alpha_0=-D^0D_0\alpha_0-2D^jc(\alpha)_{j0} \\ (\Delta\alpha)_\mu=-D^0D_0\alpha_\mu-D^\lambda D_\lambda\alpha_\mu-D^{\varrho^*}D_{\varrho^*}\alpha_\mu+R_{\mu\varrho^*}\alpha^{\varrho^*} \end{cases}$$

Or on peut écrire $D^{\varrho^*}D_{\varrho^*}=g_{\varrho^*\lambda}D^{\varrho^*}D^\lambda=D_\lambda D^\lambda$. Ensuite, de l'identité de Ricci $D_AD^B\alpha_\mu-D^BD_A\alpha_\mu=-R^E{}_{\mu,A}{}^B\alpha_E$ on déduit en utilisant les résultats du § 21

$$D_\lambda D^\lambda\alpha_\mu-D^\lambda D_\lambda\alpha_\mu=-R^\nu{}_{\mu,\lambda}{}^\lambda\alpha_\nu=-R_\mu{}^\nu\alpha_\nu=-R_{\mu\nu^*}\alpha^{\nu^*}$$
$$(\Delta\alpha)_\mu=-D^0D_0\alpha_\mu-2D^\lambda D_\lambda\alpha_\mu+2R_{\mu\varrho^*}\alpha^{\varrho^*}$$

Ainsi, en posant $(Q\alpha)_A=2R_{AB}\alpha^B$, on obtient

$$(35.2)\quad \begin{cases} (\Delta\alpha)_0+D^0D_0\alpha_0=-2D^jc(\alpha)_{j0} \qquad (Q\alpha)_0=0 \\ (\Delta\alpha)_\mu-(Q\alpha)_\mu=-2D^0c(\alpha)_{0\mu}-2D^\lambda a(\alpha)_{\lambda\mu} \end{cases}$$

Définissons une 1-forme $b(\alpha)$ en posant $b(\alpha)_A=\alpha^B[a(\alpha)_{AB}+c(\alpha)_{AB}]$

$$\delta b(\alpha)=-D^A\alpha^B[a(\alpha)_{AB}+c(\alpha)_{AB}]-\alpha^B[D^Aa(\alpha)_{AB}+D^Ac(\alpha)_{AB}]$$
$$2\delta b(\alpha)=-4(a(\alpha),a(\alpha))-8(c(\alpha),c(\alpha))+(\alpha,\Delta\alpha-Q\alpha+D^0D_0\alpha_0dx^0)$$

Si V_{2n+1} est compacte, on voit donc que toute 1-forme α vérifie

$$(35.3) \qquad <\alpha, \Delta\alpha - Q\alpha + \partial_0^2 a_0 \omega> = 4 < a(\alpha), a(\alpha)> + 8 < c(\alpha), c(\alpha)>$$

De cette identité jointe à (35.2) on déduit:

THÉORÈME. - *Pour qu'une* 1-*forme* ξ *définisse une t.i.cc. sur une variété cokählerienne compacte, il faut et suffit qu'elle vérifie*

$$(35.4) \qquad \Delta\xi - Q\xi + \partial_0^2 \xi_0 \omega = 0$$

COROLLAIRE. - *Pour que* ξ *définisse une isométrie infinitésimale, il faut et suffit qu'on ait de plus* $\delta\xi = 0$ et $\xi_0 =$ *constante.*

En effet sur toute variété riemannienne compacte, il faut et suffit pour cela que $\Delta\xi = Q\xi$ et $\delta\xi = 0$. De plus on a vu plus haut (§ 34) dans le cas cokählerien compact que si ξ définit une isométrie infinitésimale, sa composante verticale ξ_0 est constante.

b) Si ξ définit une t.i.cc., il résulte de (34.3) que $(d\xi)_{0A} = (d\xi)_{\lambda\mu} = 0$. La 2-forme $d\xi$ est donc pure et de type $(0, 1.1)$, d'où $Md\xi = 0$.

Soit une 1-forme réelle η vérifiant

$$(35.5) \qquad Md\eta = 0 \qquad \delta\eta = 0$$

De (30.1) on déduit $dM\eta = -\delta L\eta$. Ainsi $dM\eta$ est à la fois homologue et cohomologue à zéro, d'où $dM\eta = 0$, en supposant que la variété est compacte.

D'autre part si η définit une t.i.cc., $M\eta$ définit aussi une t.i.cc. car l'opérateur M sur les vecteurs covariants est identifié par la métrique à l'opérateur $-\mathfrak{I}$ sur les vecteurs contravariants. Finalement on obtient: *Si* η *définit une isométrie infinitésimale, la* 1-*forme horizontale* $M\eta$ *est fermée et définit une t.i.cc.*

Inversement si ζ est fermée, $M\zeta$ est cofermée d'après (30.1); de plus $(M\zeta)_0 = 0$. Par suite: *Si* ζ *est fermée et définit une t.i.cc.,* $M\zeta$ *définit une isométrie infinitésimale (horizontale).*

c) Soit ψ la forme de CHERN (cf. § 21): $\psi_{\alpha\beta^*} = \frac{1}{2\pi} iR_{\alpha\beta^*}$.

On constate que $Q\xi = -4\pi i(M\xi)\psi$ où $i(M\xi)$ désigne le produit

intérieur par la 1-forme $M\xi$. La condition (35.4) pour que ξ définisse une t.i.cc. peut ainsi s'écrire

$$\Delta\xi + \partial_0^2\xi_0\omega = -4\pi i\,(M\xi)\,\psi$$

Par différentiation extérieure, on obtient en remarquant que ψ est fermée

$$\Delta d\xi + d\,(\partial_0^2\xi_0)\wedge\omega = -4\pi\,\mathfrak{L}\,(M\xi)\,\psi$$

Si une 1-forme horizontale η définit une t.i.cc. laissant invariante ψ et si $\xi = M\eta$, on a $\eta = -M\xi$ et $\xi_0 = 0$. Il en résulte $\Delta d\xi = 0$; ainsi $d\xi$ est à la fois harmonique et homologue à zéro, donc $d\xi = 0$ et par suite $\delta\eta = 0$. On obtient

Proposition. - *Sur une variété cokählerienne compacte, toute t.i.cc. qui est horizontale et qui laisse invariante la 2-forme de* Chern ψ *est une isométrie infinitésimale.*

Toutes les t.i. verticales laissent ψ invariante.

§ 36. - Transformations conformes.

a) Cas d'une variété presque-cohermitienne V_m. Pour qu'une 1-forme a définisse une t.i.cf., il faut et suffit, comme sur toute variété riemannienne, que

$$D_A a_B + D_B a_A - \frac{2}{m}\, D^M a_M g_{AB} = 0$$

En l'occurrence, pour des repères adaptés à la structure presque-cocomplexe, on obtient

$$D^0 a_0 - \frac{1}{m}\, D^M a_M = 0 \qquad D_0 a_j + D_j a_0 = 0 \qquad D_i a_j + D_j a_i - \frac{2}{m}\, D^M a_M g_{ij} = 0$$

ou encore lorsque $m > 1$

$$D^k a_k = (m-1)\,D^0 a_0 \qquad D_0 a_j + D_j a_0 = 0 \qquad D_i a_j + D_j a_i - \frac{2}{m-1}\, D^k a_k g_{ij} = 0$$

Dans ces conditions et s'il y a des variétés horizontales (c'est-à-dire si $T^0 = 0$), on voit que la composante horizontale de a définit sur chaque variété horizontale une transformation infinitésimale qui est conforme pour la métrique induite.

Si a est horizontale ($a_0 = 0$), ces conditions se réduisent à $D^k a_k = 0$, $D_0 a_j = 0$ et $D_i a_j + D_j a_i = 0$. Il s'agit alors d'une isométrie infinitésimale.

Si a est verticale ($a_i = 0$), les conditions se réduisent à $D_0 a_0 = 0$ et $D_j a_0 = 0$, d'où $a_0 =$ constante. On obtient ainsi :

PROPOSITION. - *Sur une variété presque-cohermitienne de dimension au moins égale à 3, toute transformation infinitésimale conforme horizontale ou verticale est isométrique.*

b) Cas d'une variété presque-cokählerienne. Les formes ω et F sont harmoniques et leurs normes (ω, ω) et (F, F) sont constantes, valant respectivement 1 et n en tout point de V_{2n+1}. Si la variété est compacte de dimension supérieure à 1, il résulte alors d'un théorème de GOLDBERG et KOBAYASHI (cf. [12] théorème 3.7.4) que toute t.i. cf. est isométrique.

THÉORÈME. - *Sur une variété presque-cokählerienne compacte de dimension au moins égale à 3, toute transformation infinitésimale conforme est isométrique et est par conséquent un automorphisme infinitésimal de la structure presque-cokählerienne.*

§ 37. - TRANSFORMATIONS AFFINES DE CERTAINES VARIÉTÉS PRESQUE-COHERMITIENNES.

a) LEMME. - *La structure image-réciproque d'une structure presque-cohermitienne par n'importe quelle transformation μ est aussi presque-cohermitienne.*

En effet, avec les notations habituelles, la métrique $\mu^* g$ est définie-positive. Les équations $i(X)\mu^*\omega = 0$ et $i(X)\mu^* F = 0$ définissent respectivement les champs $\mu^{-1}\Pi$ et $\mu^{-1}D$. Ces champs sont transversaux et orthogonaux pour la métrique $\mu^* g$.

L'opérateur $\mathfrak{J}$ image réciproque de $\mathfrak{J}$ par μ s'exprime par $\mathfrak{J} = \mu^{-1}\mathfrak{J}\mu$. Il annule les vecteurs de $\mu^{-1}D$, laisse invariants les hyperplans $\mu^{-1}\Pi$ et induit sur eux un opérateur de carré —1.

D'après § 10, $\mathfrak{J}$ et F vérifient $\mathfrak{J}^*F=F$; on montre aisément que $\mathfrak{J}$ et μ^*F vérifient la même condition $\mathfrak{J}^*(\mu^*F)=\mu^*F$. On montre aussi aisément que $\mu^*F(\vec{u},\vec{v})=\mu^*g(\mathfrak{J}\vec{u},\vec{v})$ ce qui exprime que μ^*F est produit contracté de $\mathfrak{J}$ par μ^*g.

Toutes ces conditions suffisent pour que $\mu^*\omega$, μ^*F, μ^*g et $\mathfrak{J}$ définissent une structure presque-cohermitienne.

b) Soit V_{2n+1} une variété presque-cohermitienne munie d'une connexion presque-cohermitienne telle que son groupe d'holonomie homogène ψ'_x induise sur l'hyperplan horizontal Π_x, un groupe $H\psi_x$ qui soit irréductible dans le réel et ne soit pas sous-groupe de la représentation réelle de $Sp\left(\frac{n}{2}\right)$ au cas où n est pair. Pour exprimer cette deuxième condition nous dirons que V_{2n+1} n'est pas dégénérée pour cette connexion.

D'après la première condition, Π_x et D_x sont les sous-espaces de T_x invariants par ψ'_x. Si μ est une transformation affine de V_{2n+1} pour la connexion donnée, le groupe image réciproque de ψ'_y par μ est $\psi_{\mu^{-1}y}$: les sous-espaces $\mu^{-1}D_y$ et $\mu^{-1}\Pi_y$ sont donc invariants par $\psi_{\mu^{-1}y}$ On en déduit que les champs D et Π sont invariants par μ.

Il en résulte que $\mu^*\omega$ est verticale, que μ^*F est horizontale, que $\mathfrak{J}^2=\mathfrak{J}^2$, et aussi que D_x et Π_x sont orthogonaux pour μ^*g.

Le tenseur g_x étant invariant par ψ_x, il en est de même pour $(\mu^*g)_x$. Les tenseurs qu'ils induisent sur Π_x, soient Hg et $H\mu^*g=\mu^*Hg$, sont tous deux symétriques covariants du second ordre et invariants par le groupe $H\psi'_x$ qui est irréductible; alors on sait que

$$\mu^*Hg=a\,Hg \qquad a=\text{scalaire positif}$$

En repères adaptés à la structure presque-cocomplexe, cela se traduit par $(\mu^*g)_{ij}=ag_{ij}$. Comme on a de plus $g_{0j}=0$ et $(\mu^*g)_{0j}=0$, on en déduit

$$(\mu^*g)^{ij}=\frac{1}{a}\,g^{ij}$$

Comme la connexion est presque-cohermitienne, la forme F a sa dérivée covariante nulle (§ 14). F est donc invariante par ψ_x et il en est de même pour μ^*F. Comme on a supposé que ψ_x n'appartient pas à la représentation réelle de $1\times Sp\left(\frac{n}{2}\right)$, quand n est pair, et

comme μ^*F est horizontale, il résulte d'un lemme de Lichnerowicz [2] § 52 que

$$\mu^*F = bF \qquad b = \text{scalaire}$$

Le tenseur presque-cocomplexe $\mathfrak{F}$ de la structure image-réciproque est un produit contracté de μ^*F et μ^*g

$$\mathfrak{F}_A^B = (\mu^*F)_{AE}(\mu^*g)^{EB}$$

Il en résulte

$$\mathfrak{F} = \frac{b}{a}\,\mathfrak{I}$$

Utilisant $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{I}^2$ on obtient $b = \pm a$, d'où

$$\mathfrak{F} = \pm \mathfrak{I}$$

Si μ appartient au plus grand groupe connexe $A_0(V_{2n+1})$ de transformations affines relativement à la connexion donnée, on a $\mathfrak{F} = +\mathfrak{I}$.

Théorème. - *Etant donnée une variété presque-cohermitienne munie d'une connexion presque-cohermitienne vérifiant les deux conditions ci-dessus, toute transformation affine μ préserve l'opérateur $\mathfrak{I}$ de structure presque-cocomplexe ou bien le change en son opposé. Si μ appartient au plus grand groupe connexe $A_0(V_{2n+1})$ de transformations affines, μ est une transformation presque-cocomplexe.*

§ 38. - Cas des variétés cokählériennes complètes.

Le théorème précédent s'applique en particulier aux variétés cokählériennes munies de leur connexion riemannienne si celle-ci vérifie les deux conditions voulues.

Etudions maintenant la question pour une variété cokählérienne complète V_{2n+1} dont la courbure de Ricci définisse, en un point x au moins, une forme quadratique non dégénérée sur l'hyperplan horizontal Π_x. Le revêtement universel $\tilde{V}_{2n+1}$ de V_{2n+1} admet une structure naturelle de variété cokählérienne complète et la courbure de Ricci correspondante jouit de la même propriété.

La variété $\tilde{V}_{2n+1}$ simplement connexe et complète peut être décomposée selon un théorème de De Rham en un produit topologique et riemannien d'une ligne euclidienne verticale V_1 assimilable à une droite complète et d'une variété horizontale V_{2n} kählerienne complète et simplement connexe.

On sait (cf. [2] § 50) qu'on a alors $A_0(\tilde{V}_{2n+1}) = A_0(V_1) \times A_0(V_{2n})$ On sait encore (cf. [2] § 55) que $A_0(V_{2n})$ coïncide avec le plus grand groupe connexe des automorphismes de la structure kählerienne. $A_0(V_1)$ se compose des similitudes positives sur la droite.

D'après un lemme de Lichnérowicz [2] § 51, toute transformation affine $\mu \in A_0(V_{2n+1})$ définit une transformation affine $\tilde{\mu} \in A_0(\tilde{V}_{2n+1})$ telle que $p\tilde{\mu} = \mu p$, où p est la projection canonique de $\tilde{V}_{2n+1}$ sur V_{2n+1}. Si μ est horizontale, $\tilde{\mu}$ l'est aussi. Dans ce cas, d'après la décomposition ci-dessus, on a $\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_{2n})$, où μ_1 est la transformation identique de V_1 et μ_{2n} est un automorphisme de la structure kählerienne de V_{2n}. Ainsi $\tilde{\mu}$ est un automorphisme horizontal de $\tilde{V}_{2n+1}$. De même μ est donc un automorphisme horizontal de V_{2n+1}.

Théorème. - *Etant donnée une variété cokählerienne complète V_{2n+1} dont la courbure de* Ricci *définit, en un point x au moins, une forme quadratique non dégénérée sur l'hyperplan horizontal Π_x, tout élément horizontal de $A_0(V_{2n+1})$ est un automorphisme de la structure cokählerienne.*

§ 39. - Holonomie et transformations cocomplexes.

a) Soit $\underline{\sigma_x}$ l'algèbre d'holonomie en x de la variété cokählerienne compacte V_{2n+1}. Par abaissement d'indice au moyen de la métrique, chaque élément de σ_x s'identifie à une 2-forme réelle horizontale (cf. § 25), qui est de type $(0, 1, 1)$ car $\mathfrak{I}_x$ est invariant par σ_x.

Introduisons l'opérateur J sur les tenseurs réels covariants d'ordre 2 défini par

$$(Jt)_{AB} = t_{AE}\, \mathfrak{I}^E_B \tag{39.1}$$

Si on restreint J aux tenseurs horizontaux on a $J^2 = -1$. Pour

les tenseurs de type $(0,1,1)$ J transforme un tenseur symétrique en un tenseur antisymétrique et vice-versa. Si $A_x^{(0,1,1)}$ désigne l'espace vectoriel des 2-formes réelles en x de type $(0,1,1)$, l'espace vectoriel des tenseurs covariants réels de type $(0,1,1)$ peut être identifié à la somme directe $A_x^{(0,1,1)} + JA_x^{(0,1,1)}$.

Posons $S_x = \sigma_x + J\sigma_x$. C'est un espace vectoriel stable par J dont les éléments sont des tenseurs covariants réels de type $(0,1,1)$, muni d'une structure complexe définie par la restriction de J.

Si pour tout x d'un ouvert U, $s_{ij}(x)$ définit un élément de σ_x, il en est de même de $v^A D_A s_{ij}$ où (v^A) désigne un champ local arbitraire de vecteurs (cf. [1] § 57), compte tenu du fait que la dérivation covariante D permute avec les projecteurs selon les types. Par suite, si pour tout $x \in U$, $u_{ij}(x)$ définit un élément de S_x, on a pour tout champ (v^A)

$$v^A D_A u_{ij} \in S_x$$

Soit B_x le sous-espace supplémentaire de σ_x dans $A_x^{(0,1,1)}$ et orthogonal à σ_x au sens du produit scalaire $(u,v) = \frac{1}{2} u_{ij} v^{ij}$. L'espace vectoriel $C_x = B_x + JB_x$ est stable par J, orthogonal à S_x et supplémentaire de S_x dans $A_x^{(0,1,1)} + JA_x^{(0,1,1)}$.

Si pour tout $x \in U$, $\gamma_{ij}(x)$ définit un élément de C_x, on a encore pour tout champ (v^A)

$$v^A D_A \gamma_{ij} \in C_x$$

On montre encore (cf. [2] § 91) que si pour tout $x \in U$, $(u_{ij}(x)) \in S_x$ et $(\gamma_{ij}(x)) \in C_x$, les tenseurs réels de composantes respectives $(v^{\nu*} D_{\nu*} u_{\lambda\mu*}, v^\nu D_\nu u_{\lambda*\mu})$ et $(v^{\nu*} D_{\nu*} \gamma_{\lambda\mu*}, v^\nu D_\nu \gamma_{\lambda*\mu})$, en repères complexes adaptés, appartiennent respectivement à S_x et à C_x.

Soit maintenant ξ une 1-forme horizontale définissant une t.i.cc. D'après les conditions (34.3) auxquelles s'ajoute alors $D_0 \xi_0 = 0$, la dérivée covariante de ξ est un tenseur pur de type $(0,1,1)$. Décomposons-le en la somme $D_i \xi_j = u_{ij} + \gamma_{ij}$, $(u_{ij}) \in S_x$, $(\gamma_{ij}) \in C_x$.

On montre, comme dans [2] § 91, que $D_i \gamma^{ij} = 0$. Si on pose $\alpha_i = \gamma_{ij} \xi^j$, on obtient alors

$$\delta\alpha = - D_A (\gamma^{Aj} \xi_j) = - \gamma^{ij} D_i \xi_j = - \gamma^{ij} (u_{ij} + \gamma_{ij})$$

$$\delta\alpha = - \gamma^{ij} \gamma_{ij} \leq 0$$

Par intégration sur la variété compacte orientable V_{2n+1}, il vient $\gamma_{ij} = 0$. Ainsi le tenseur $D_A \xi_B$ appartient à S_x. Nous énoncerons:

THÉORÈME. - *Etant donnée sur une variété cokählerienne compacte V_{2n+1} une 1-forme horizontale ξ définissant une* t.i.cc., *le tenseur réel $D_A \xi_B$ est de type* (0,1,1) *et appartient en chaque point x de V_{2n+1} à l'espace vectoriel $S_x = \underline{\sigma_x} + J\underline{\sigma_x}$ où $\underline{\sigma_x}$ désigne l'algèbre d'holonomie en x.*

Si ξ définit une t.i.cc. non horizontale, c'est le tenseur (t_{AB}) défini par $t_{00} = 0$ et $t_{AB} = D_A \xi_B$ pour $A + B \neq 0$, qui est de type (0, 1, 1) et qui appartient à S_x.

b) Supposons que les sous-variétés horizontales soient réductibles. C'est-à-dire supposons réductible le groupe induit sur H_x par le groupe d'holonomie homogène ψ_x. Alors le groupe induit sur H_x par σ_x est a fortiori réductible. D'après § 25 on peut donc décomposer l'hyperplan horizontal H_x en une somme directe de sous-espaces orthogonaux $P_x^a (a = 0, 1, ..., k)$ invariants par $\mathfrak{J}$ et par σ_x, tels que σ_x induise sur P_x^0 la représentation identité et sur chaque $P_x^a (a \neq 0)$ une représentation irréductible. Soit (x^0, x^{i_a}), où $a = 0, 1, ..., k$, un système de coordonnées locales adapté à la réductibilité:

$$\mathfrak{J}^{i_b}_{i_a} = 0 \qquad (a \neq b)$$

Pour tout élément (s_{AB}) de l'algèbre d'holonomie en x, on a

$$s_{0A} = 0 \qquad s_{i_a j_b} = 0 \qquad (a \neq b)$$

On en déduit pour tout élément (u_{AB}) de S_x:

$$u_{0A} = 0 \qquad u_{i_a j_b} = 0 \qquad (a \neq b)$$

En particulier, d'après le théorème précédent, si ξ est une 1-forme définissant une t.i.cc.

$$D_0 \xi_i = D_j \xi_0 = 0 \qquad D_{i_a} \xi_{j_b} = 0 \qquad (a \neq b) \tag{39.2}$$

Soit Q_x^1 un sous-espace de H_x invariant par ψ_x et qui contient P_x^0 ou lui est orthogonal. Ce sous-espace est somme directe d'un

certain nombre de P_x^a et est par suite invariant par $\mathfrak{I}$. Il en est de même pour l'orthocomplément Q_x^2 de Q_x^1 dans Π_x. Ces sous-espaces déterminent par transport deux champs horizontaux Q^1 et Q^2 complètement intégrables et le double feuilletage ainsi défini sur les variétés horizontales se compose de feuilles $V^1(x)$ et $V^2(x)$ analytiquement plongées dans des variétés kählériennes, donc kählériennes.

Utilisant la formule $[\xi, \eta]_A = \xi^B D_B \eta_A - \eta^B D_B \xi_A$ jointe à (39.2), on voit que l'algèbre L_H des t.i.cc. horizontales est somme directe d'idéaux L_H^1 et L_H^2 correspondant respectivement à des t.i.cc. opérant sur les feuilles $V^1(x)$ (resp. $V^2(x)$) et échangeant entre elles les feuilles $V^2(x)$ (resp. $V^1(x)$).

Corollaire 1. - *Le plus grand groupe connexe de transformations cocomplexes d'une variété cokählerienne compacte respecte le multifeuilletage défini par la réductibilité.*

c) La variété étant compacte on peut, pour toute 1-forme ξ, poser $\xi = \eta + \zeta$ où η est cofermée et ζ fermée, cette décomposition n'étant naturellement pas unique en général. Supposons maintenant que ξ définisse une t.i.cc. ; on a alors $Md\xi = 0$ et par suite η satisfait à

$$Md\eta = 0 \qquad \delta\eta = 0$$

c'est-à-dire aux relations (35.5). Il en résulte que $M\eta$ est fermée. D'autre part d'après la deuxième relation (30.1), $M\zeta$ est cofermée.

D'après le théorème précédent, la 2-forme $d\xi = d\eta$ au point x appartient à l'algèbre d'holonomie $\underline{\sigma_x}$, car $\underline{\sigma_x}$ est l'ensemble de tous les tenseurs antisymétriques appartenant à S_x. Il en est de même de la 2-forme $dM\xi = dM\zeta$.

Or d'après la relation $dM\eta = 0$, on voit que les seules composantes non nulles de $d\eta$ sont

$$(d\eta)_{\alpha\beta^*} = 2D_\alpha \eta_{\beta^*} \qquad (d\eta)_{\beta^*\alpha} = 2D_{\beta^*}\eta_\alpha$$

De même d'après la relation $d\zeta = 0$, les seules composantes non nulles de $dM\zeta$ sont

$$(dM\zeta)_{\alpha\beta^*} = -2iD_\alpha \zeta_{\beta^*} \qquad (dM\zeta)_{\alpha^*\beta} = 2iD_{\alpha^*}\zeta_\beta$$

Corollaire 2. - *Sur une variété cokählerienne compacte, soit*

ξ une 1-forme définissant une t.i.cc. *Si nous la décomposons en somme d'une forme cofermée η et d'une forme fermée ζ, les tenseurs* $(D_{\alpha}\eta_{\beta^*}, D_{\alpha^*}\eta_{\beta})$ et $(D_{\alpha}\zeta_{\beta^*}, D_{\alpha^*}\zeta_{\beta})$ *appartiennent respectivement à* σ_x *et* $J\sigma_x$.

§ 40. - Une algèbre de transformations infinitésimales cocomplexes.

a) Sur toute variété cocomplexe V_{2n+1} si X et $Y \in L_{cc}$, $\mathfrak{J}X$ et $\mathfrak{J}Y$ sont aussi éléments de L_{cc}. $\mathfrak{J}$ annule les éléments de L_V, applique L_{cc} sur L_H, induit sur L_H un opérateur de carré -1 et vérifie sur L_{cc}

$$\mathfrak{J}[X, Y] = [X, \mathfrak{J}Y] = [\mathfrak{J}X, Y] \tag{40.1}$$

Supposons que V_{2n+1} soit cokählerienne compacte. Soit L_0 l'algèbre de toutes ses isométries infinitésimales et soit L_1 sa sous-algèbre horizontale. Leur dimension est finie. D'après § 34, L_0 est somme directe de L_1 et de la sous-algèbre verticale, laquelle est constituée par les champs kE, où E est le champ vertical canonique (tel que $\omega(E)=1$), et k est une constante.

Considérons le sous-espace de L_{cc} défini par $L_2 = L_1 + \mathfrak{J}L_1$. Il est invariant par $\mathfrak{J}$. De plus on constate aisément que

$$[L_2, L_2] \subset L_2$$

L_2 est donc une sous-algèbre-complexe de L_{cc}. Sa dimension est paire.

Désignons par L_1^C l'algèbre complexifiée de L_1. A tout élément $X + iY$ de L_1^C ($X, Y \in L_1$), faisons correspondre l'élément $X + \mathfrak{J}Y$ de L_2. D'après les relations (40.1) il s'agit d'un homomorphisme de L_1^C sur L_2, dont le noyau est l'idéal N défini par les $X + iY$ tels que

$$X = -\mathfrak{J}Y \quad \text{soit} \quad Y = \mathfrak{J}X$$

Pour cela, d'après § 35b, la 1-forme horizontale ξ identifiée à X doit être fermée. D'après (34.4), le champ horizontal X doit donc avoir sa dérivée covariante nulle. N est donc constitué par les éléments $X + i\mathfrak{J}X$, où X est un champ horizontal à dérivée covariante nulle. N a donc même dimension réelle que l'idéal

N_1 de L_1 constitué par les champs horizontaux à dérivée covariante nulle. Soit $C_1(V_{2n+1})$ cette dimension, qui est inférieure ou égale à $2n$. Elle est paire car N_1 est invariant par $\mathfrak{I}$. On a en particulier

$$\dim L_2 = 2 \dim L_1 - C_1(V_{2n+1})$$

La variété étant compacte, son plus grand groupe connexe d'isométries est compact, et l'algèbre L_0 est donc réductive ainsi que sa sous-algèbre L_1. Leurs complexifiées L_0^C et L_1^C sont aussi réductives. De l'existence d'un homomorphisme de L_1^C sur L_2, il résulte que L_2 est réductive.

Théorème. - *Sur une variété cokählerienne compacte, le sous-espace complexe (relativement à $\mathfrak{I}$) de l'algèbre L_{cc} engendré par les isométries infinitésimales horizontales constitue une sous-algèbre complexe L_2. Cette algèbre L_2 est réductive. De même est réductive l'algèbre cocomplexe $L_0 + \mathfrak{I}L_0$ engendrée par toutes les isométries infinitésimales.*

b) Sur la variété cokählerienne V_{2n+1}, soit $\mathfrak{A}_H(V_{2n+1})$ le plus grand groupe connexe de tranformations cocomplexes horizontales. Supposons ce groupe semi-simple et soit L_H son algèbre de Lie, qui est alors semi-simple et complexe (relativement à l'opérateur $\mathfrak{I}$). Si K est un sous-groupe connexe compact maximal de $\mathfrak{A}_H(V_{2n+1})$ et si $\underline{K}$ est son algèbre de Lie, on sait que (cf. [13] § 6 et 7 ch III)

$$L_H = \underline{K} + \mathfrak{I}\underline{K}$$

On peut substituer à la métrique cokählerienne initiale g de V_{2n+1} une nouvelle métrique cokählerienne γ relative à la même structure cocomplexe et invariante par K, construite en prenant la moyenne, au sens de la mesure de Haar sur K, des transformées de g par les éléments de K.

Soit $I_H(V_{2n+1}, \gamma)$ le plus grand groupe connexe des isométries horizontales de V_{2n+1} munie de la métrique γ et soit L_1 son algèbre de Lie. Si l'on suppose que la variété est compacte, $I_H(V_{2n+1}, \gamma)$ est un groupe de Lie compact, qui contient K d'après la construction de γ et qui est contenu dans $\mathfrak{A}_H(V_{2n+1})$ d'après le corollaire du paragraphe 18. K étant compact maximal dans $\mathfrak{A}_H$, on a donc

$K = I_H(V_{2n+1}, \gamma)$. Ainsi $\underline{K}$ coïncide avec L_1, d'où

$$L_H = L_1 + \mathfrak{I} L_1$$

Théorème. - *Si l'algèbre L_H des* t.i.cc. *horizontales d'une variété cokählerienne compacte V_{2n+1} est semi-simple, il existe sur V_{2n+1} une métrique cokählerienne telle que L_H coïncide avec sa sous-algèbre complexe L_2 engendrée par les isométries infinitésimales horizontales correspondantes.*

§ 41. - Cas d'une variété dont la courbure scalaire est constante.

a) Lemme. - *Si ξ est une 1-forme horizontale (resp. verticale) définissant une* t.i.cc. *sur une variété cokählerienne compacte, sa décomposition selon* de Rham *donne trois composantes horizontales (resp. deux composantes verticales et la troisième nulle).*

Cette décomposition a déjà été évoquée au § 30b, où on a montré que les opérateurs H et G, de même que Δ, permutent avec les projecteurs selon les types. Pour la même raison ils permutent avec d et δ. Soit la décomposition:

$$\xi = H\xi + G\delta d\xi + Gd\delta\xi$$

Tout d'abord $H\xi$ est horizontale (resp. verticale). Comme ξ définit une t.i.cc., la 2-forme $d\xi$ est horizontale (resp. nulle) d'après (34.3). Alors $\delta d\xi$ est aussi horizontale (resp. nulle) et de même $G\delta d\xi$. La troisième composante $Gd\delta\xi$ est donc nécessairement aussi horizontale (resp. verticale). Q.E.D.

b) Supposons tout d'abord que ξ définisse une t.i.cc. verticale.

$$\xi = H\xi + d\delta G\xi$$

Posons $H\xi = \eta$; c'est une 1-forme verticale harmonique. Elle est donc fermée et cofermée, ce qui se traduit respectivement par $\partial_j \eta_0 = 0$ et $\partial_0 \eta_0 = 0$, d'où $\eta_0 =$ constante. $H\xi$ définit donc une isométrie infinitésimale. Il en résulte que la deuxième composante $\zeta = d\delta G\xi$ définit une t.i.cc.

c) Supposons maintenant que ξ définisse une t.i.cc. horizontale. Si on pose encore $\xi = \eta + \zeta$ où η est cofermée et ζ homologue à zéro, η et ζ seront horizontales. Calculons

$$\delta Q\eta = -2D_A(R^{AB}\eta_B) = -2\eta_B D_A R^{AB} - 2R^{AB} D_A \eta_B$$

Or le tenseur symétrique (R^{AB}) est pur de type $(0, 1, 1)$ d'après § 21 *b*, et la partie pure de type $(0, 1, 1)$ du tenseur $(D_A \eta_B)$ est antisymétrique car $dM\eta = 0$ (cf. § 39 *c*), d'où $R^{AB} D_A \eta_B = 0$. D'autre part d'après une propriété classique des variétés riemanniennes on a

$$2D_A R^A_B - D_B R = \partial_B R \quad \text{où} \quad R = R^A_A. \quad \text{On obtient ainsi :}$$

$$\delta Q\eta = -\eta^B \partial_B R$$

Supposons maintenant que la courbure scalaire soit constante. Alors $Q\eta$ est cofermée. Or il en est de même de $\Delta\eta = \delta d\eta$. D'après (35.4) il en est donc encore de même pour la 1-forme $\Delta\zeta - Q\zeta = -(\Delta\eta - Q\eta)$.

Il en résulte que le produit scalaire $< \Delta\zeta - Q\zeta, \zeta >$ est nul puisque le premier facteur est cofermé et le second homologue à zéro. La relation (35.3) appliquée à la 1-forme horizontale ζ montre alors que $a(\zeta) = c(\zeta) = 0$, c'est-à-dire que ζ définit une t.i.cc. Il en est par suite de même pour η. Comme η est de plus horizontale et cofermée, elle définit une isométrie infinitésimale. D'après le § 35 *b*, $M\zeta$ définit aussi une isométrie infinitésimale, laquelle se transforme par $-M$ en ζ. Il en résulte que

$$L_H = L_1 + \mathfrak{I} L_1$$

Appliquons aussi le raisonnement précédent à la forme $M\eta$ qui définit une t.i.cc. horizontale et qui est fermée

$$M\eta = HM\eta + d\delta GM\eta$$

Ainsi $HM\eta$ définit une isométrie infinitésimale. Comme cette forme est de plus fermée, sa dérivée covariante est nulle d'après (34.4). Or H, de même que Δ, permute avec M. On en déduit que la 1-forme $H\eta = H\xi$ est aussi à dérivée covariante nulle.

Théorème. - *Sur une variété cokählerienne compacte dont la courbure riemannienne scalaire est constante, l'algèbre L_H de toutes les t.i.cc. horizontales coïncide avec sa sous-algèbre-complexe L_2 engendrée par les isométries infinitésimales horizontales. La partie harmonique de toute 1-forme définissant une t.i.cc. est à dérivée covariante nulle. L'algèbre L_H est réductive, et aussi l'algèbre L_{cc} de toutes les t.i.cc.*

Ce théorème peut être appliqué à toute variété cokählerienne compacte admettant un groupe connexe, compact, horizontalement transitif, de transformations cocomplexes. En effet si l'on substitue à la métrique initiale une métrique cokählerienne invariante par ce groupe (construite au moyen de la mesure de Haar), la courbure scalaire de cette métrique est constante. Par suite l'algèbre L_{cc} et sa sous-algèbre L_H sont réductives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, 1955.

[2] — — *Géométrie des groupes de transformations*, 1958.

[3] — — *Cours au Collège de France* (1961-1962): Réductivité des algèbres d'automorphismes des structures symplectiques, cosymplectiques et des structures de contact. Rendiconti di Matematica, 1963 (1-2) Vol. 22, pp. 197-244.

[4] C. Ehresmann, *Sur les variétés presque complexes*, Proc. Int. Cong. Math. Harvard 1950, pp. 412-419.

[5] — — *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950.

[6] Paulette Libermann, *Thèse Sc. Math. Strasbourg*, 1953. Annali di Matematica, t. 36, 1954.

[7] — — *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact.*, Coll. Géom. diff. globale CBRM, Bruxelles, 1958, pp. 37-59.

[8] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. 65 (1957), pp. 391-404.

[9] D. Bernard, *Thèse Sc. Math.*, Paris, 1960.

[10] G. De Rham, *Variétés différentiables*, 1955.

[11] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kähleriennes*, 1958.

[12] S. I. Goldberg, *Curvature and Homology*, 1962.

[13] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, 1963.

[14] S. Sasaki (and Y. Hatakeyama), *On differentiable manifolds with certain structures...*, Tôhoku Math. Journ., t. 12 (1960), pp. 459-476 et t. 13 (1961), pp. 281-294.

[15] C. J. Hsu, *Note on* (Φ, ξ, η) *structure*, Tôhoku Math. Journ., t. 13 (1961), p. 434.

[16] J. Bouzon, *Structures presque-cocomplexes*, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 255 (1962), pp. 822-824 et pp. 1061-1063.

[17] — — *Structures presque-cohermitiennes*, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 258 (1964), pp. 412-415.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

PROPAGATEURS SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE HYPERBOLIQUE

VU ET APPROUVÉ :
Paris, le 5 Mars 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE.